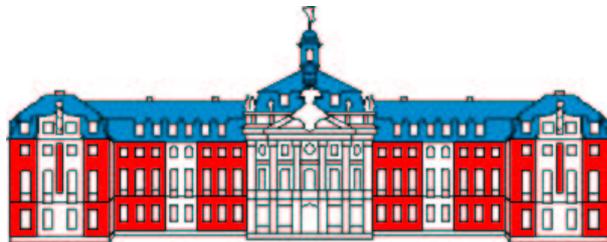


Anamorphosen und Luftspiegelungen aus dem Blickwinkel des Physikunterrichts

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der
Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die
Sekundarstufe I und II
Themensteller: Prof. Dr. H. J. Schlichting



dem Staatlichen Prüfungsamt für Lehrämter an Schulen

- Münster -

vorgelegt von

Markus Heeke

10.06.2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Didaktische Vorüberlegungen	5
2.1	Zur Situation des Physikunterrichts in Deutschland	5
2.2	Anforderungen an den Physikunterricht	6
2.3	Sinnstiftende Kontexte als Ausweg aus der Bildungskrise	8
3	Anamorphosen und Luftspiegelungen als Phänomene	11
3.1	Die Anamorphose als Künstelement	11
3.1.1	Die perspektivische Anamorphose	11
3.1.2	Die katoptrische Anamorphose	14
3.2	Anamorphosen in unserer Umwelt	18
3.3	Luftspiegelungen als natürliches Phänomen	19
4	Physikalische Grundlagen	21
4.1	Licht als elektromagnetische Welle	21
4.2	Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen	25
4.3	Abhängigkeiten des Brechungsindex	30
4.3.1	Der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge . .	30
4.3.2	Der Brechungsindex von Luft in Abhängigkeit von Temperatur und Druck	33
4.4	Geometrische Optik	35
4.4.1	Reflexion am ebenen Spiegel	36
4.4.2	Reflexion am Zylinderspiegel	38
5	Beispiele zur Herstellung von Anamorphosen	41
5.1	Anamorphotische Raster	41

Inhaltsverzeichnis

5.1.1	Perspektivisches Raster	41
5.1.2	Raster für katoptrische Anamorphosen	42
5.2	Mathematische Beschreibung von Anamorphosen	48
5.2.1	Zylinderanamorphosen	48
5.2.2	Kegelanamorphosen	57
5.3	Fotografisches Verfahren zur Herstellung einer Kegelanamorphose . .	60
5.3.1	Theoretische Beschreibung	60
5.3.2	Praktische Durchführung	62
5.4	Mechanische Geräte zur Erstellung von Anamorphosen	66
5.4.1	Kegelanamorphosenzeichner	67
5.4.2	Zylinderanamorphosenzeichner	68
5.5	Computerprogramme zur Erstellung von Anamorphosen	78
5.5.1	Selbst erstelltes Programm zur Berechnung von katoptrischen Anamorphosen	78
5.5.2	Bereits existierende Programme zur Berechnung von katoptri- schen Anamorphosen	84
6	Qualitative Erklärungen von Luftspiegelungen	86
6.1	Refraktionserscheinungen unter Normalbedingungen	86
6.1.1	Astronomische Refraktion	86
6.1.2	Terrestrische Refraktion	88
6.2	Entstehung von Luftspiegelungen	90
6.3	Arten der Luftspiegelung	91
6.3.1	Spiegelung nach unten	92
6.3.2	Spiegelung nach oben	97
6.3.3	Seitliche Spiegelungen	102
6.4	Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen bei Luftspiegelungen	104
6.4.1	Vergrößerungen	104

6.4.2	Verkleinerungen	105
6.5	Die Fata Morgana	106
7	Quantitative Erklärungen von Luftspiegelungen	110
7.1	Verlauf der Lichtstrahlen	110
7.2	Methode der Scheitelpunktskurve nach TAIT	111
7.3	Theorie der atmosphärischen Spiegelungen nach WEGENER	115
7.4	Topologische Erklärung von Luftspiegelungen	121
7.4.1	Beschreibung des Modells	121
7.4.2	Topologische Erklärung des Modells	124
7.4.3	Verzerrungen – Zusammenhang zwischen Verkleinerung und Vergrößerung	128
7.4.4	Leistungen und Probleme der topologischen Herangehensweise	130
8	Schlussbetrachtung	133
A	Weitere perspektivische Anamorphose und ihre Entzerrung	135
B	Verwendete Anamorphoskope	136
C	Fotografisch hergestellte Kegelanamorphosen und ihre Entzerrun- gen	137
C.1	Eigene anamorphotische Aufnahmen	137
C.2	Entzerrung der Aufnahmen mithilfe des Anamorphoskops	142
D	Hilfssatz zur topologischen Beschreibung von Luftspiegelungen	146
E	Computerprogramm auf der beiliegenden CD	147
	Abbildungsverzeichnis	148
	Literatur	151

1 Einleitung

... und die Spiegelung hob in diesem Augenblick das Meer wie einen flimmernden Silberstreif über den Rand des Deiches, so daß es blendend in die Kammer schimmerte.

aus: *Der Schimmelreiter*

von THEODOR STORM

Anamorphosen und Luftspiegelungen beschreiben optische Phänomene, die die Menschheit seit jeher faszinieren. Der deutsche Jesuit Athanasius KIRCHER hat in seiner Publikation *Ars magna lucis et umbrae* bereits im Jahr 1671 die Auffälligkeiten bei Anamorphosen und Luftspiegelungen dargestellt. Während das Naturphänomen der Luftspiegelung schon vor Jahrtausenden beschrieben wurde, sind Anamorphosen erst Ende des 15. Jahrhunderts „erfunden“ worden. Im deutschen Sprachgebrauch sind Luftspiegelungen bzw. die Fata Morgana in der Prosadichtung des 19. und 20. Jahrhunderts spätestens seit Johann Wolfgang von GOETHE häufig zu finden. So wird die Luftspiegelung in der Novelle *Der Schimmelreiter* von Theodor STORM beispielsweise zum Boten der bevorstehenden Naturkatastrophe.

Luftspiegelungen und Anamorphosen treten aber nicht nur in der Literatur auf, sondern umgeben uns im Alltag. Obwohl höchstwahrscheinlich jeder schon einmal Anamorphosen und Luftspiegelungen gesehen hat, würden viele Menschen die Frage, ob sie schon einmal eines dieser beiden Phänomene wahrgenommen haben, mit einer ähnlich hohen Wahrscheinlichkeit verneinen, da ihnen nicht bewusst ist, was Anamorphosen oder Luftspiegelungen genau sind. Anamorphosen sind Bilder, die in einer bestimmten Weise verzerrt sind, sodass sich der wahre Inhalt des Zerrbildes dem Betrachter nur erschließt, wenn er die Anamorphose aus einem bestimmten Blickwinkel oder mithilfe eines geeigneten Spiegels betrachtet. Schon die etymologi-

sche Herkunft des Wortes aus dem Griechischen weist darauf hin, dass der Betrachter das Bild selbst „zurückformen“ muss (*Ana* bedeutet „aufs Neue“ und *Morphosis* heißt „Gestalt, Form“).

Luftspiegelungen stellen im Allgemeinen auch verzerrte Bilder dar. Insbesondere bei der sogenannten Fata Morgana treten teilweise solch extreme Verzerrungen auf, dass beispielsweise ein kleiner Stein als großer Berg erscheint. Wie bei den *perspektivischen* und *katoptrischen* Anamorphosen muss der Betrachter einer Luftspiegelung eine bestimmte Position einnehmen, um das Phänomen der Luftspiegelung wahrnehmen zu können. Während bei den Luftspiegelungen erst durch die Einnahme einer bestimmten Position das in der Regel verzerrte Spiegelbild sichtbar wird, so verschwindet bei den o.g. Anamorphosen die Verzerrung bei Betrachtung aus einem bestimmten Blickwinkel oder mithilfe eines entsprechenden Anamorphoskops (Spiegels).

Auf unseren Straßen sind sowohl Anamorphosen als auch Luftspiegelungen in ihren einfachen Formen wahrzunehmen. Verkehrszeichen, die verzerrt auf die Straße gezeichnet wurden, stellen eine praktische Einsatzmöglichkeit perspektivischer Anamorphosen dar, während die an heißen Sommertagen ebenfalls auf Straßen zu beobachtende Luftspiegelung Teile des Himmels auf den erhitzten Asphalt abbildet und auf diese Weise Wasserpfützen vortäuscht. Gemeinsam ist diesen Erscheinungen die auftretende Verzerrung, die bei den Anamorphosen bewusst geschaffen wird, während sie bei den Luftspiegelungen aus natürlichen Gründen entsteht. Im Hinblick auf ihre Alltäglichkeit und ihren hierin begründeten Realitätsbezug wird diesen Erscheinungen im Physikunterricht wenig Beachtung geschenkt. Daher soll die vorliegende Arbeit Anregungen geben, wie Anamorphosen und Luftspiegelungen in den Physikunterricht eingebunden werden können.

Zu Beginn dieser Arbeit wird in Kapitel 2 auf die Situation des Physikunterrichts in Deutschland eingegangen. Dabei werden auch die Anforderungen an einen modernen Physikunterricht sowie didaktische Methoden vorgestellt, mit denen eine Verbesserung der Unterrichtssituation im Fach Physik einhergehen könnte. Zum Abschluss dieses Kapitels wird geprüft, ob Anamorphosen und Luftspiegelungen im Physikunterricht didaktisch sinnvoll eingesetzt werden können.

Wie bereits oben angedeutet, bieten die Anamorphosen und Luftspiegelungen Ansatzpunkte für einen kontextorientierten Unterricht, der sich auf die Lebenswelt, wie sie sich für die Schüler¹ darstellt, bezieht. Kapitel 3 soll daher beleuchten, wo uns die Phänomene Anamorphosen und Luftspiegelungen in unserem Leben begegnen. Im Physikunterricht sollten nach der Beobachtung eines Phänomens die physikalischen Gesetze, die zur Beschreibung des Phänomens nötig sind, erarbeitet werden. Analog wird in der vorliegenden Arbeit im nächsten Schritt die Physik, die zur Beschreibung und Erklärung dieser Phänomene notwendig ist, dargelegt (Kapitel 4). Da es für Schüler wichtig ist, Gelerntes selbst anzuwenden, beschäftigt sich Kapitel 5 mit der Erstellung anamorphotischer Bilder. Es werden im Wesentlichen fünf verschiedene, schülergerechte Möglichkeiten vorgestellt, die teilweise auf experimentellem Wege zu anamorphotischen Abbildungen führen:

- anamorphotische Raster,
- mathematische Transformationsgleichungen,
- ein fotografisches Verfahren,
- mechanische Anamorphosenzeichner und
- Einsatz von Computerprogrammen.

¹Der Begriff „Schüler“ stehe hier und im Folgenden für Schülerinnen und Schüler.

Zum Themenbereich Luftspiegelungen wurden von mir keine Experimente durchgeführt, da die für einen Einsatz in der Schule geeigneten Experimente bereits in der Examensarbeit *Physikalische Untersuchungen zum Phänomenbereich der Luftspiegelung* von Matthias HARBEKE (2001) gesammelt und durchgeführt wurden (vgl. [Harbeke 2001]).

In Kapitel 6 sollen Berichte von Augenzeugen einer Luftspiegelung die fehlende Anschauung, die die Experimente liefern könnten, kompensieren. Das Phänomen der Luftspiegelung sowie weitere eng mit der Luftspiegelung verknüpfte Erscheinungen werden hier qualitativ untersucht, um im darauffolgenden Kapitel 7 Möglichkeiten zur Berechnung der Orientierung und Anzahl der Bilder einer Luftspiegelung darzulegen.

Die theoretische Behandlung der Luftspiegelungen in diesem Kapitel ist für den Einsatz in der Sekundarstufe I jedoch nicht mehr geeignet. Beispielsweise könnte die topologische Herangehensweise an die quantitative Erklärung von Luftspiegelungen allerdings einen Aufhängepunkt für einen fächerübergreifenden Projektunterricht in der Sekundarstufe II bilden.

Im Anhang befinden sich unter anderem anamorphotische Fotos, die nach dem in Kapitel 5.3 beschriebenen fotografischen Verfahren erstellt wurden, die Entzerrungen der jeweiligen Aufnahmen mit dem entsprechenden Anamorphoskop, eine CD mit einem Programm zur Erstellung von Anamorphosen sowie der Beweis eines Lemmas, das zur topologischen Erklärung der Luftspiegelungen benutzt wurde.

2 Didaktische Vorüberlegungen

2.1 Zur Situation des Physikunterrichts in Deutschland

Nicht erst seit der jüngsten PISA-² oder der TIMMS-Studie³ wissen wir, dass die deutschen Schüler erhebliche Schwierigkeiten im Bereich des naturwissenschaftlichen Verständnisses und bei der Anwendung ihres Wissens haben. Schon 22 Jahre vor PISA konnte man in der Zeitschrift *bild der wissenschaft* in einem Artikel von Gernot BORN Folgendes lesen ([Born 1978]):

Der derzeitige Physikunterricht beschränkt sich offenbar nur sehr einseitig auf die Vermittlung von physikimmanenten Faktenwissen. Er trägt kaum zu tieferen Einsichten bei.

Die Auswertung der PISA-Studie hat insbesondere gezeigt, dass es im naturwissenschaftlichen Unterricht in Deutschland an Problem- und Anwendungsorientierung mangelt. Während vor allem in den skandinavischen und anglo-amerikanischen Ländern die naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen sowie das Verständnis für deren Besonderheit geschult werden, werden diese Aspekte in Deutschland bisher eher selten systematisch berücksichtigt. Dies mag als eine Erklärung dafür dienen, dass die Schüler der eben genannten Länder im Vergleich zu Deutschland in den naturwissenschaftlichen Fächern wesentlich besser abgeschnitten haben.

Die Unterschiede spiegeln sich dabei in mehreren Aspekten wider. Zum einen spielt die gesellschaftliche Wertschätzung von Naturwissenschaften allgemein und damit die Wertschätzung naturwissenschaftlicher Bildung in der Gesellschaft eine Rolle. Erstaunlich ist in Deutschland, dass Physik trotz der Wichtigkeit dieser Disziplin in unserer modernen Gesellschaft (z.B. in der Mikroelektronik oder in der Raumfahrt) bei einem Großteil der Bevölkerung auf Desinteresse stößt. Vor allem das physikali-

²PISA = Programme for International Student Assessment, vgl. <http://www.pisa.oecd.org>

³TIMMS= Trends in Mathematics and Science Study, vgl. <http://www.timms.org>

sche Grundwissen lässt sehr zu wünschen übrig. Dies ist nicht zuletzt auf den relativen Stellenwert des Faches Physik und anderer Naturwissenschaften innerhalb des Schulsystems zurückzuführen. Schon in der Schule wird das Fach Physik, das oft mit der unbeliebten Mathematik auf dieselbe Stufe gestellt wird, von vielen Schülern so weit wie möglich gemieden. Grund dafür könnte sein, dass vielen Schülern die Inhalte, die im Fach Physik gelehrt werden, ähnlich wie im Fach Mathematik zu abstrakt und zu realitätsfern erscheinen. Da dem Schüler bereits in der Sekundarstufe I die Motivation für das Nebenfach Physik fehlt, umgeht er es auch in der Sekundarstufe II. Aber gerade in der Oberstufe werden im Physikunterricht durch Teilgebiete wie Atom- und Kernphysik oder Quantenmechanik wichtige Errungenschaften des 20. Jahrhunderts behandelt, die in unserer Zeit Anwendung finden.

2.2 Anforderungen an den Physikunterricht

Ein weiterer Aspekt, der in diesem Zusammenhang berücksichtigt werden muss, ist die Art und Organisation des naturwissenschaftlichen Unterrichts und die didaktischen Ansätze. Ein Blick in die Richtlinien und Lehrpläne der Sekundarstufe I und II des Landes Nordrhein-Westfalen, die 1993 bzw. 1999 herausgegeben wurden, zeigt, dass der Realitätsbezug beim Unterrichten bestimmter Inhalte betont wird. Das geht bereits aus den Hauptzielen der Sekundarstufe I hervor, denn es sollen die wichtigsten fachlichen Themen, Inhalte und Methoden vermittelt werden, sowie eine Orientierung in der gegenwärtigen und zukünftigen Wirklichkeit gegeben werden (vgl. [MfSW 1993], S. 16).

Auch bei der Beschreibung der fachspezifischen Aufgaben und Ziele des Physikunterrichts in der Sekundarstufe I liegt ein Schwerpunkt im Wirklichkeitsbezug:

Der Physikunterricht geht von wichtigen Phänomenen und Vorgängen der natürlichen und technischen Umwelt aus und macht deutlich, dass sich viele von ihnen gesetzmäßig beschreiben lassen. Die Schülerinnen

und Schüler erarbeiten wichtige physikalische Gesetze und werden dazu angeleitet, diese Gesetze zur Erklärung von Naturvorgängen und technischen Vorgängen zu nutzen. ([MfSW 1993], S. 32)

Dabei wird in den Richtlinien für die Unterrichtsgestaltung empfohlen, die phänomenologische Betrachtung zunächst in den Vordergrund zu stellen, um dann auf induktive Weise physikalische Erkenntnisse zu gewinnen (vgl. [MfSW 1993], S. 77). Konkret benannt werden in den Richtlinien Anwendungsmöglichkeiten des erlernten Stoffes auf die Umwelt bzw. den Alltag, um so die physikalischen Eigenschaften wie Definitionen oder Gesetze, die die Schüler kennengelernt haben, in Kontexte zu setzen und in den Alltag einzubinden. Dagegen werden die Beispiele für die Phänomene aus unserer Umwelt, auf die der Physiklehrer seinen Unterricht aufbauen soll, nicht explizit genannt.

Betrachtet man nun die Aufgaben und Ziele, die dem Fach Physik in den Richtlinien der Sekundarstufe II zugeschrieben werden, stellt man fest, dass auch hier ein Schwerpunkt im Realitätsbezug liegt, denn die Schülerinnen und Schüler sollen einen Einblick in die Wissenschaft Physik bekommen und Physik als eine Form der Erschließung der Welt erfahren (vgl. [MfSW 1999], S. 5).

Anders als in den Richtlinien für die Sekundarstufe I wird in den Richtlinien der Sekundarstufe II das *Lernen im Kontext* als ein Bereich, der die Grundstruktur des Physikunterrichts festigt, genannt. Dieser Bereich ist dabei auf derselben Ebene anzusiedeln wie die Bereiche der fachlichen Inhalte und der Methoden und Formen des selbstständigen Arbeitens. Lernen im Kontext soll „den Bezugsrahmen für die Vermittlung fachlicher Inhalte“ ([MfSW 1999], S. 20) bilden und es den Schülern ermöglichen, das neue Wissen mit bereits vorhandenem Wissen zu verknüpfen und eigene Alltagserfahrungen miteinzubeziehen. Abschließend wird gesagt, dass „[Lernen im Kontext] wegen seiner Komplexität und seines Aspektenreichtums [...] fachübergreifendes Denken [fördert] und [...] somit zu einem vertieften Verständnis der Wirk-

lichkeit [führt]“ ([MfSW 1999], S. 8). Dieses Prinzip verlangt vom Lehrer, dass er seinen Unterrichtsstoff ständig oder zumindest regelmäßig in Bezug zum Alltag und zu Phänomenen aus der Umwelt setzt. Physikunterricht besteht dabei also nicht aus theoretischen Definitionen und Sätzen, sondern vielmehr aus Erklärungsversuchen der Phänomene aus der unmittelbaren und entfernteren Umgebung der Schüler. Der Bezug zur Lebenspraxis soll vor allem das Interesse an Physik bei den Schülern wecken und die Motivation steigern. Die Schüler sollen dabei für Problemzusammenhänge sensibilisiert und zum Fragenstellen angeregt werden.

Im Lehrplan für das Fach Physik wird in dem Kapitel über die Themen und Gegenstände für die Sekundarstufe II die didaktische Konzeption des Lernens im Kontext dahingehend konkretisiert, als dass Beispiele für Kontexte gegeben werden (vgl. [MfSW 1993], S. 15). Im Anhang der Richtlinien werden diese Beispiele tiefergehend betrachtet und kommentiert. Insofern scheinen die Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II im Bezug auf *Lernen in Kontexten* recht weit entwickelt zu sein, was sicherlich auch auf das jüngere Erscheinungsjahr (1999) zurückzuführen ist.

2.3 Sinnstiftende Kontexte als Ausweg aus der Bildungskrise

Die Grundgedanken dieser jüngeren Entwicklung in den Richtlinien und Lehrplänen finden sich auch in den Entwürfen einer zeitgemäßen Didaktik des Physikunterrichts, z.B. in den Vorstellungen des Physikdidaktikers Heinz MUCKENFUSS. Für ihn umfasst die Einbettung des Unterrichts in sinnstiftende Kontexte nicht nur die Berücksichtigung von Alltagserfahrungen und Anwendungsmöglichkeiten, sondern auch das Hinterfragen des naturwissenschaftlichen Fortschritts, der eigenen Existenz und des eigenen Handelns (vgl. [Muckenfuß 1995]). Um eine stärkere Orientierung an die Lebenswelt der Schüler zu gewährleisten, stützt sich die innovative und praxisnahe Physikdidaktik auf die Kernaussage „von den Phänomenen ausgehen“. Nach WA-

GENSCHEIN geht man dabei „von jenen auffälligen Tatsachen [aus], die zum Nachdenken, Diskutieren und Experimentieren herausfordern“ ([Schlichting u.a. 1981], S. 24, 25). Das Prinzip „von den Phänomenen ausgehen“ muss jedoch insofern relativiert werden, als viele dieser physikalischen Phänomene nicht direkt wahrnehmbar sind, sondern erst mit Hilfe technischer Vorrichtungen erzeugt werden müssen. Sie sind nicht einfach zu beobachtende Tatsachen, sondern komplexer und erfordern eine Konzentration auf bestimmte herausragende Merkmale (vgl. [Schlichting u.a. 1981], S. 25).

Im Folgenden werden die Phänomene „Anamorphosen“ und „Luftspiegelungen“ betrachtet, die in den Physikunterricht der Mittelstufe eingebunden werden können (vgl. auch Kapitel 8 auf Seite 133). Anamorphosen stellen insofern einen sinnstiftenden Kontext für den Physikunterricht dar, als dass die Schüler bei der Behandlung dieses Themas einen Bezug zu ihrem alltäglichen Leben erkennen können. Jeder wird schon einmal die verzerrten Verkehrszeichen auf der Straße oder sich selbst in einem verzerrenden Spiegel betrachtet haben. Gleiches gilt für Luftspiegelungen, da man davon ausgehen kann, dass beispielsweise jeder Schüler bereits Luftspiegelungen als vorgetäuschte Wasserpfützen auf einer asphaltierten Straße wahrgenommen hat.

Darüber hinaus bieten die Themenkomplexe „Anamorphosen“ und „Luftspiegelungen“ interdisziplinäre Anknüpfungspunkte. Neben der Mathematik, die sich hinter ihnen verbirgt, können Anamorphosen z.B. auch im Kunstunterricht behandelt werden, während die klimatischen Bedingungen für das Entstehen von Luftspiegelungen etwa im Erdkundeunterricht zum Thema gemacht werden können. Der Begriff *Fata Morgana* wird mit unterschiedlichen Vorstellungen assoziiert. Häufig wird ein durstender Wanderer in der Wüste mit diesem Begriff verknüpft, aber ebenso häufig steht er als eine Metapher für ein Trugbild oder eine Täuschung. Somit kann in den Fächern Deutsch und Religion ebenfalls an das Thema Luftspiegelungen bzw. *Fata Morgana* angeknüpft werden. Die Spaltung des roten Meeres und der Gang Jesu auf

dem Wasser können auch als eine auf Luftspiegelungen beruhende Täuschung interpretiert werden (vgl. [Tributsch 1983]) und stellen auf diese Weise Diskussionsstoff für den Religions- oder Philosophieunterricht dar.

Die Themen „Anamorphosen“ und „Luftspiegelungen“ bieten also genügend Anknüpfungspunkte für einen modernen, fächerübergreifenden Unterricht, der das Interesse der Schüler wecken kann, da sie einen Bezug zu Erfahrungen aus dem alltäglichen Leben herstellen können. Das Naturphänomen der Luftspiegelungen kann von den Schülern unmittelbar in der direkten Umwelt erlebt werden und gilt daher nach MUCKENFUSS bereits als sinnstiftender Kontext. Die optische Illusion, die beide Themenbereiche verbindet, fasziniert den Menschen immer wieder und bildet daher eine solide Grundlage für einen Unterricht, der zum Nachdenken und Experimentieren anregt.

3 Anamorphosen und Luftspiegelungen als Phänomene

3.1 Die Anamorphose als Kunstelement

Das 17. und 18. Jahrhundert stellten die Blütezeit der Anamorphosen als Elemente der Kunst dar. Die ersten bekannten Anamorphosen sind jedoch schon wesentlich älter (Ende des 15. Jahrhunderts). Es finden sich viele Bilder, die von Künstlern so verzerrt wurden, dass sie nur unter Einnahme einer bestimmten Blickrichtung wieder entzerrt werden können (perspektivische Anamorphosen). Seit dem 18. Jahrhundert entstanden auch katoptrische Anamorphosen als Kunstelemente, die unter Zuhilfenahme eines Anamorphoskops (z.B. Kegel- oder Zylinderspiegel) dechiffrierbar sind. Die Anamorphose bot den Künstlern eine Möglichkeit, Bilder mit prekärem Inhalt zu verschlüsseln und so z.B. versteckt Kritik zu üben. Auch heutzutage erfreuen sich Anamorphosen nicht nur als optische Spielerei im Kinderzimmer einer gewissen Beliebtheit. Der holländische Künstler Adrian P. GOODIJN zeigte beispielsweise im Jahr 1992 in Dinkelsbühl auf einer Sonderausstellung eigene anamorphotische Werke, deren Besonderheit darin lag, dass die Skulpturen sowohl das verzerrte Bild als auch das Anamorphoskop beinhalteten.

Im Folgenden werden zunächst Beispiele für perspektivische Anamorphosen in der Kunst gegeben und anschließend katoptrische Anamorphosen beleuchtet.

3.1.1 Die perspektivische Anamorphose

Die älteste bekannte Anamorphose stammt von Leonardo DA VINCI und kann auf das Jahr 1485 datiert werden. Dabei lagen DA VINCI zu diesem Zeitpunkt noch keine Konstruktionsanleitungen vor, nach denen er bei seiner Zeichnung hätte vorgehen können. Vielmehr sind diese Skizzen DA VINCIS ein Beleg für das Experimentieren eines Künstlers mit anamorphotischen Verzerrungen nach dem Vexierbildprinzip. Es handelt sich bei dieser Zeichnung (siehe Abb. 1) um einen Kinderkopf und ein

Auge, die aufgrund der Verzerrung nur schwierig zu erkennen sind. Am Augenlid (rechts im Bild) sind kleine vertikale Markierungen sichtbar, deren Abstände sich von rechts nach links vergrößern. Diese lassen darauf schließen, dass sich DA VINCI trotz des experimentellen Charakters seiner Skizzen schon Gedanken über mathematisch-proportionale Gesetze gemacht hat (vgl. [Eser 1998]). Die Verzerrung, die von rechts nach links zunimmt, wird korrigiert, wenn man die Abbildung mit einem Auge aus einem kleinen Winkel von der rechten Seite betrachtet.



Abbildung 1: Frühes Beispiel einer anamorphotischen Zeichnung: Leonardo DA VINCI, Folio 35 des Codex Antlanticus, ca. 1485, Mailand, Biblioteca Ambrosiana. Quelle: [Baltrusaitis 1984], S. 33

Eine weitere frühe Anamorphose (ca. 1535) zeigt Abb. 2. Genauer gesagt handelt es sich hier um vier Anamorphosen des Nürnberger Grafikers Erhard SCHÖN, einem Schüler von Albrecht DÜRER. Auf den ersten Blick zeigt der Holzschnitt abwechselnd einige frontalanseitige unverzerrte Landschaftszenen mit weiteren zunächst bizarren Formen. SCHÖN hat sich hier die sich verjüngenden Dreieckformate perspektivischer Anamorphosen zunutze gemacht und auf diese Weise vier Vexierbilder auf einem Blatt gezeichnet.

Unter wechselseitiger Betrachtung von links und rechts aus einem kleinen spitzen Winkel, dechiffrieren sich die Formen zu vier Porträts der vier mächtigsten Herrscher der 1530er Jahre (Karl V., Ferdinand I., Papst Paul III. und Franz I.). Die experimentelle Phase, der die Skizzen DA VINCIS zugeschrieben werden müssen, ist hier offensichtlich vorbei, denn SCHÖN gelingt es virtuos, das anamorphotische Verfahren umzusetzen und so eine vollständige Beherrschung der Konstruktion zu suggerieren (vgl. [Elffers u.a. 1975], S. 11).

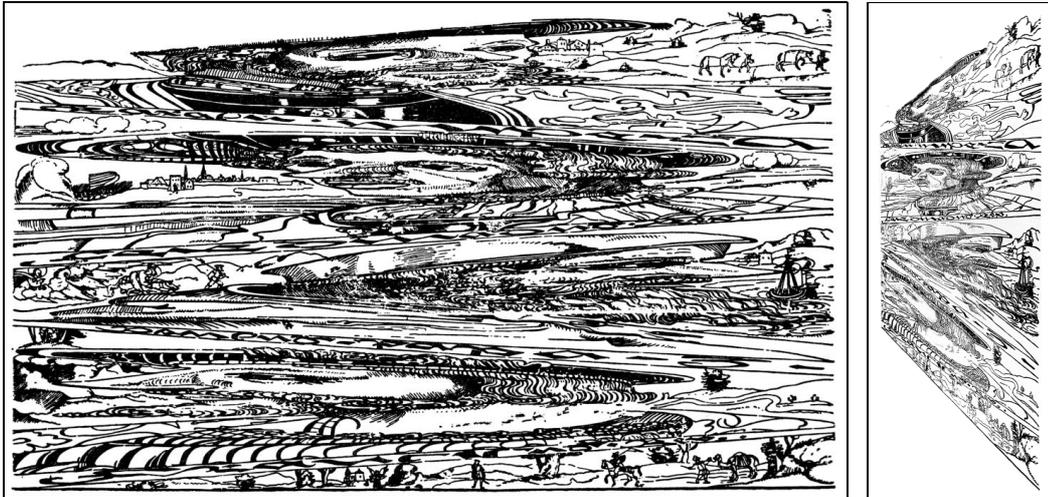


Abbildung 2: Links sieht man das Vexierbild von Erhard SCHÖN und rechts eine Entzerrung bei Betrachtung von rechts.

Quellen: [Elffers u.a. 1975], S. 12 und [Eser 1998], S. 99

Die wohl bekannteste Anamorphose stellt das Werk *Die Gesandten* von Hans HOLBEIN aus dem Jahr 1533 dar (siehe Abb. 3). Hier handelt es sich um ein lebensgroßes Doppelporträt (ca. zwei mal zwei Meter) von Jean de Danteville (links), dem Gesandten des französischen Königs am englischen Hofe, und seinem Freund Georges Selve (rechts). Auf dem Boden befindet sich zwischen den beiden Gesandten ein seltsames Objekt, das zunächst nicht identifizierbar ist. Erst unter geeignetem Betrachtungswinkel stellt sich heraus, dass es sich um einen Totenschädel handelt. Dazu muss man das Gemälde aus Augenhöhe in der Verlängerung der Achse dieses Objekts unter einem kleinen spitzen Winkel von rechts betrachten. Jurgis BALTRUŠAITIS ist der Auffassung, dass durch den Totenkopf das gesamte Gemälde in ein anderes Licht gestellt wird und HOLBEIN damit auf die Vergänglichkeit des Lebens hinweisen wollte. Andere deuten den Schädel, das „hohle Bein“, als ein Wortspiel mit dem Namen

des Malers (vgl. [Baltrusaitis 1984], S. 91ff und [Elffers u.a. 1975], S. 13).



Abbildung 3: Hans Holbein: *Die Gesandten*, 1533, London, National Gallery.

Quelle: [Baltrusaitis 1984], S. 40

3.1.2 Die katoptrische Anamorphose

Katoptrische Anamorphosen sind Anamorphosen, die durch Betrachtung in einem Spiegel (Anamorphoskop) entzerrt werden können. Es handelt sich bei den katoptrischen Anamorphosen um geometrisch verzerrt konstruierte Abbildungen, die mit verschiedenen Verfahren hergestellt werden können. Einige Möglichkeiten zur Her-

stellung katoptrischer Anamorphosen werden in Kapitel 5 vorgestellt. Während heute viele katoptrische Anamorphosen mittels geometrischer Verfahren, die auf den optischen Reflexionsgesetzen beruhen, konstruiert werden, wurden sie in den Anfängen unter Betrachtung des zu verzerrenden Objekts in einem Spiegel mit freier Hand gezeichnet. Häufig werden Zylinder und Kegel als Spiegel eingesetzt, jedoch gibt es auch Anamorphosen, die zur Dechiffrierung einen pyramidischen oder einen sphärischen Spiegel benötigen.

Einen Hinweis auf die frühesten katoptrischen Anamorphosen (um 1625) liefert ein Kupferstich von Hans TRÖSCHEL. Auf diesem Stich betrachten einige Satyrn erstaunt einen auf einem Tisch stehenden spiegelnden Zylinder, der einen Elefanten zeigt. Die verzerrte Darstellung des Elefanten ist dabei auf der Tischfläche eingezeichnet. Die Entzerrung auf dem konvexen Spiegel scheint für die Betrachter etwas Neuartiges zu sein. Spekulationen zufolge stellt der Elefant einen Hinweis auf den asiatischen Ursprung dieser rätselhaften Verzerrung dar.

Obwohl chinesische Zylinderanamorphosen existieren (Abb. 4 zeigt eine davon), die auf ca. 1580 datiert werden, ist noch nicht geklärt, ob die zylindrischen Anamorphosen von Reisenden nach China gebracht wurden oder ob es sich um eine chinesische Erfindung handelt. Die ersten zylindrischen Anamorphosen von chinesischen Künstlern wurden geschaffen, indem diese das Bild von Personen und Gegenständen in einem Zylinderspiegel abzeichneten.

Die früheste schriftliche Quelle über katoptrische Anamorphosen, die man bisher gefunden hat, stellt eine Veröffentlichung von VAULEZARD aus dem Jahr 1630 unter dem Titel *Perspective cylindrique et conique* dar. Der Zeitraum, in dem die ersten katoptrischen Anamorphosen auftraten, kann also relativ genau bestimmt werden. Ihr Ursprung ist jedoch zweifelhaft, da auch in Europa frühe Beispiele anamorphotischer Kunst, zu deren Dechiffrierung Spiegel benötigt werden, zu finden sind (vgl. [Baltrusaitis 1984]).

Neben den zylindrischen Anamorphosen finden sich auch Beispiele für die Ver-



Abbildung 4: Bild einer historischen Zylinderanamorphose eines anonymen chinesischen Künstlers aus dem 16. Jahrhundert [Elffers u.a. 1975] in einem Zylinderspiegel.

wendung von Kegelanamorphosen in der Kunst. Während ein Zylinderspiegel an den Rand einer Zylinderanamorphose gestellt und von schräg oben betrachtet wird, ist zur Betrachtung einer typischen Kegelanamorphose ein Augpunkt, der senkrecht über der Kegelspitze liegt, zu wählen (vgl. Abb. 5).



Abbildung 5: *Boxende Männer* stellt diese historische Grafik aus einer Serie von Kegelanamorphosen dar, die aus dem 18. Jahrhundert stammt.

Quelle: [Elffers u.a. 1975]

3.2 Anamorphosen in unserer Umwelt

Nicht nur in der Kunst spielen Anamorphosen eine Rolle, sondern auch im täglichen Leben. In unserer Umwelt finden wir beispielsweise auf der Straße perspektivische Anamorphosen in Form verzerrter Zeichen. Die verzerrten Fahrräder, Pfeile und andere Verkehrshinweise nehmen ihre normalen Proportionen an, wenn sie aus einer gewissen Entfernung betrachtet werden. Abbildung 6 zeigt ein solches Zeichen für eine Fahrradstraße, das aus einer bestimmten Blickrichtung unverzerrt wahrgenommen werden kann, während es bei senkrechter Betrachtung von oben stark verzerrt ist.



Abbildung 6: Beispiel für eine perspektivische Anamorphose im Straßenverkehr. Links ist das auf die Straße gezeichnete Rad in der Draufsicht zu sehen. Rechts wurde es aus einem Winkel fotografiert, der die Verzerrung rückgängig macht.

Die Werbeindustrie macht sich ebenfalls das Phänomen der perspektivischen Anamorphosen, die unter bestimmten Blickwinkeln wieder entzerrt erscheinen, zunutze. Beispielsweise wird dieser Effekt häufig bei Fernsehübertragungen von Fußballspielen ausgenutzt. Unter dem Blickwinkel fest installierter Fernsehkameras erscheinen stark verzerrte Werbebanner, die auf dem Rasen neben den Toren ausgebreitet wer-

den, in ihren bekannten, normalen Proportionen. Zudem scheinen sie sich vom Rasen zu lösen und wirken für den Kameramann bzw. für den Zuschauer am Fernsehgerät wie eine echte Werbebande. Diese optische Täuschung kann vom Zuschauer entlarvt werden, wenn eine Kamera aus einer anderen Perspektive das Banner zeigt, dessen Aufdruck dann nicht mehr zu entschlüsseln ist.

Weitere wichtige Anwendungsbeispiele für anamorphotische Abbildungen finden sich in der Kino- und Fototechnik. In der Regel erfolgen hierbei Aufnahmen mit einem anamorphotischen Objektiv, wobei die anamorphotischen Bilder als solche vom Negativ auf eine Kopie übertragen werden. Die Projektion wird wiederum mit einem anamorphotischen Objektiv vorgenommen, welche die verzerrten Bilder im gleichen Verhältnis wie bei der Aufnahme wieder entzerrt und formgetreu projiziert. Auch das bekannte Breitbildverfahren basiert auf der Grundlage anamorphotischer Abbildungen. Anamorphosen treten außerdem in illusionistischen Wand- und Deckengemälden, in der Anwendung von beschleunigter und verzögerter Perspektive und im Kulissenbau im Theater auf.

3.3 Luftspiegelungen als natürliches Phänomen

Luftspiegelungen sind Phänomene, die den Menschen bereits seit Jahrtausenden bekannt sind. Während Luftspiegelungen früher für ein Produkt der Phantasie oder für etwas Magisches gehalten wurden, gibt es beginnend mit dem 17. Jahrhundert wissenschaftliche Erklärungsversuche für dieses Naturphänomen.

Es gibt viele verschiedene Erscheinungsformen von Luftspiegelungen, wie beispielsweise die schon erwähnte, häufig auftretende, auffällige Tatsache, dass an heißen Sommertagen auf einer Asphaltstraße in einiger Entfernung scheinbar flimmernde, dünne und glitzernde Wasserflächen zu beobachten sind (siehe Abb. 7). Allgemein bekannt ist auch die sogenannte *Fata Morgana*, bei der es sich im volkstümlichen Sinne um eine Luftspiegelung handelt, die in der Ferne verheißungsvolle Palmen und

Seen erscheinen lässt. Dabei kann aus einem oder wenigen Bäumen eine ganze Oase entstehen. Nicht nur die auffällige Tatsache, dass Luftspiegelungen im Alltag vorkommen, sondern auch das Geheimnisvolle dieses Naturschauspiels ruft bei vielen Menschen, insbesondere auch bei Schülern, Interesse hervor und regt zum Nachdenken über dieses Phänomen an.



Abbildung 7: Alltägliche Luftspiegelung auf einer erwärmten Fahrbahn.

Quelle: [Elert 2003]

4 Physikalische Grundlagen

Anamorphosen und Luftspiegelungen sind Erscheinungen, deren Beschreibung u. a. die Kenntnis einiger Gesetze der Optik erfordert. Daher werden in diesem Kapitel die entsprechenden Grundlagen dargelegt. Ausgehend von der Lichtfortpflanzung in unterschiedlichen Medien werden die verschiedenen Fälle beim Übergang eines Lichtstrahls von einem Medium in ein anderes Medium betrachtet. Die Reflexion und Brechung eines Lichtstrahls sind hier für die Beschreibung der Anamorphosen und Luftspiegelungen wichtig. Außerdem ist die Abhängigkeit des Brechungsindex der Luft von Temperatur und Druck für das Verständnis der Luftspiegelungen entscheidend. Die Untersuchung dieser Abhängigkeit erfolgt ebenfalls in diesem Kapitel. Es genügt zur Beschreibung dieser Phänomene von der geometrischen Optik auszugehen, die sich als Grenzfall aus den *Maxwellschen Gleichungen* ergibt.

Die physikalischen Vorstellungen über das Zustandekommen einer optischen Abbildung im Auge waren zunächst sehr unterschiedlich. ARISTOTELES, PLATON und EUKLID vertraten die Auffassung, dass das Auge Strahlen aussendet und die gesehenen Objekte abtastet. Der arabische Augenarzt IBN AL HAITHAM soll um das Jahr 1000 festgestellt haben, dass die gesehenen Objekte Licht aussenden ([Gerthsen 1995], S. 481). Nach dem heutigen physikalischen Verständnis wird Licht oft als eine von Atomen und Molekülen als Folge von Zustandsänderungen abgestrahlte elektromagnetische Energie bezeichnet.

4.1 Licht als elektromagnetische Welle

Zwar sind die Wellentheorie und die quantentheoretische Beschreibung des Lichts jeweils zur Erklärung bestimmter Phänomene unumgänglich, aber um bestimmte optische Probleme zu lösen, ist häufig die Betrachtung des Lichts als Strahl ausreichend. Insbesondere für die Beschreibung der Anamorphosen und Luftspiegelungen genügt es, diese sogenannte geometrische Optik zu betreiben, da die zu betrachten-

den Objekte im Verhältnis zur Wellenlänge des sichtbaren Lichts groß sind. Um aber ein tieferes Verständnis der Reflexion und Brechung zu schaffen, wird im Folgenden das Licht zunächst als eine elektromagnetische Welle aufgefasst. Eine quantentheoretische Betrachtung erscheint im Rahmen des Themas dieser Arbeit hingegen nicht sinnvoll.

Der englische Physiker James Clerk MAXWELL veröffentlichte in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts eine Theorie der elektromagnetischen Wellen. Ausgehend von den Überlegungen FARADAYS beschrieb MAXWELL mithilfe mathematischer Methoden die Theorie des elektromagnetischen Feldes. Dabei stellte er fest, dass das sichtbare Licht ein elektromagnetisches Phänomen ist. Der Zusammenhang dynamischer elektrischer und magnetischer Felder wird in den Maxwell'schen Gleichungen deutlich. Die Gleichungen veranlassten Ludwig BOLTZMANN zu dem Ausruf: „War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb ...?“ ([Gerthsen 1995], S. 423). Tatsächlich stellen die Maxwell-Gleichungen die Grundlage für die Beschreibung elektromagnetischer Wellen dar.

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich folgern, dass elektromagnetische Wellen in einem ungeladenen Isolator transversal sind. Außerdem stehen das magnetische und das elektrische Feld jeweils senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und aufeinander (siehe Abb. 8).

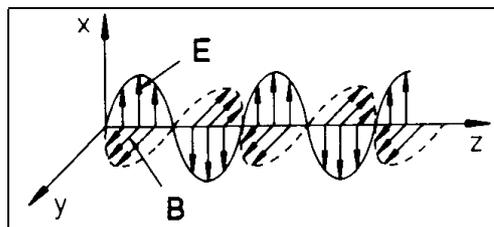


Abbildung 8: Transversale elektromagnetische Welle. Quelle: [Nolting 1997]

Folglich ist aufgrund der Maxwell-Gleichungen eine ebene, elektromagnetische Welle bereits vollständig bestimmt, wenn man das elektrische oder das magnetische Feld kennt. Daher genügt es, im Folgenden den elektrischen Feldstärkevektor \vec{E} zu betrachten (vgl. [Nolting 1997]): Gemäß Abb. 8 soll sich die Welle ohne Beschränkung der Allgemeinheit nun in z -Richtung ausbreiten. Wegen der Transversalitätsbedingung schwingt \vec{E} dann in der x - y -Ebene und es gilt für das elektrische Feld mit den üblichen Bezeichnungen ([Nolting 1997], S. 234):

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y, \quad (4.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} E_x &= |E_{0x}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi + \delta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Das elektrische Feld lässt sich also als Vektoraddition zweier Feldvektoren mit der relativen Phasenverschiebung δ beschreiben. Die Feldvektoren schwingen dabei jeweils senkrecht zueinander in x - bzw. y -Richtung. In Gleichung (4.2) stellt \vec{k} den sogenannten *Wellen-* oder *Ausbreitungsvektor* dar, der die Ausbreitungsrichtung angibt. Außerdem ist er betragsmäßig mit der Wellenlänge λ verknüpft:

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

In dieser Gleichung gilt für \vec{k} wegen der Ausbreitung der Welle in z -Richtung

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{e}_z.$$

Die Polarisation der Welle ist gegeben durch die maximalen Feldamplituden $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$ sowie durch die relative Phase δ . Für verschiedene Werte der relativen Phase ist die Welle unterschiedlich polarisiert. Beispielsweise erhalten wir für $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$ folgende Gleichung:

$$\vec{E} = (|E_{0x}| \vec{e}_x \pm |E_{0y}| \vec{e}_y) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi).$$

Dabei stellt der Ausdruck in der ersten Klammer einen orts- und zeitunabhängigen Vektor dar. Die Welle ist linear polarisiert, da die elektrische Feldstärke \vec{E} relativ zur Ausbreitungsrichtung in einer festen Richtung schwingt. Da sich jede beliebig polarisierte Welle als Superposition zweier linear unabhängiger, linear polarisierter Wellen schreiben lässt, wird im Folgenden eine solche Welle betrachtet:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi). \quad (4.3)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle ist abhängig vom Medium, in dem sich die Welle fortpflanzt. Ebenfalls aus den Maxwell-Gleichungen ergibt sich die Geschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem Medium mit der relativen Permeabilität μ_r und der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r zu

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}. \quad (4.4)$$

Das Einsetzen der entsprechenden Naturkonstanten sowie der relativen Permeabilität μ_r und der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r für das Vakuum ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$) in Gleichung (4.4) liefert als Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Vakuum die Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Im Gegensatz zu Wasserwellen oder Schallwellen sind elektromagnetische Wellen bei ihrer Ausbreitung nicht auf Materie als Medium angewiesen. Daher können elektromagnetische Wellen auch von den Sternen, wie z.B. der Sonne, zur Erde gelangen. Elektromagnetische Wellen sind aber ebenfalls in der Lage, sich durch Materie fortzupflanzen. Allerdings folgt nach Gleichung (4.4), dass sich elektromagnetische Wellen in Materie langsamer ausbreiten und zwar mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}},$$

weil in allen Medien ε_r und μ_r größer oder gleich 1 sind. Betrachtet man nun den Quotienten aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle

im Vakuum und der in einem Medium, so erhält man eine für das jeweilige Medium charakteristische Größe, die als *Brechzahl* oder *Brechungsindex* n des Materials bezeichnet wird:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \quad (4.5)$$

Diese Beziehung, die die Theorie der elektromagnetischen Felder mit der Optik verbindet, wird als *Maxwell-Relation* bezeichnet ([Nolting 1997], S. 261). Geht man nun von Stoffen aus, die nicht bzw. kaum magnetisch sind, kann $\mu_r \approx 1$ angenommen werden, so dass die Maxwell-Relation den Zusammenhang zwischen einer rein optischen und einer rein elektrischen Größe beschreibt.

4.2 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen

Reflexion und Brechung sind die entscheidenden Erscheinungen, mit denen Anamorphosen und Luftspiegelungen zu erklären sind. Daher werden nun das Reflexions- und das Brechungsgesetz hergeleitet. Das Verhalten einer elektromagnetischen Welle in einem homogenen Medium ist im Unterkapitel 4 beschrieben worden, so dass nun ihr Verhalten an einer Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien untersucht wird. Wir betrachten dazu das elektrische und das magnetische Feld, die jeweils in zur Grenzfläche parallele und senkrechte Anteile zerlegt werden:

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_s, \quad (4.6)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_s. \quad (4.7)$$

Aus den Sätzen von GAUSS und STOKES sowie aus den Maxwell-Gleichungen können die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zwischen den verschiedenen Medien hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1p} &= \vec{E}_{2p}, & \vec{E}_{1s} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \vec{E}_{2s}, \\ \vec{B}_{1p} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_{2p}, & \vec{B}_{1s} &= \vec{B}_{2s}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der Index 1 bzw. 2 bezeichnet dabei das jeweilige Medium. Dementsprechend bedeuten ε_i bzw. μ_i (mit $i = 1, 2$) die verschiedenen Dielektrizitäts- bzw. Permeabilitätskonstanten der entsprechenden Medien. Die parallele Komponente des elektrischen Feldes sowie die senkrechte Komponente des magnetischen Feldes bleiben beim Übergang von Medium 1 in Medium 2 also unverändert.

Wenn nun eine elektromagnetische Welle, die aus dem Medium 1 kommt, auf eine Grenzfläche zum Medium 2 fällt, wird das Licht an dieser Grenzfläche teilweise reflektiert und teilweise gebrochen (transmittiert). Die einfallende Welle \vec{E}_e , die reflektierte Welle \vec{E}_r und die gebrochene Welle \vec{E}_g können durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= \vec{E}_{e0} \cdot \cos(\vec{k}_e \vec{r} - \omega_e t), \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{r0} \cdot \cos(\vec{k}_r \vec{r} - \omega_r t), \\ \vec{E}_g &= \vec{E}_{g0} \cdot \cos(\vec{k}_g \vec{r} - \omega_g t).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Grenzfläche die x - z -Ebene darstellt und die Normale auf diese Grenzfläche zusammen mit dem einfallenden Wellenvektor \vec{k}_e die x - y -Ebene aufspannt. Der Ursprung sei so gewählt, dass die einfallende Welle in demselben auf die Grenzfläche treffe und die reflektierte und die transmittierte Welle somit im Ursprung ihren Anfang haben. Im Medium 1 überlagern sich die einfallende und die reflektierte Welle, während im Medium 2 allein die transmittierte Welle verläuft. Für den parallelen Anteil des elektrischen Feldes gilt aufgrund der Stetigkeitsbedingungen (4.8):

$$\vec{E}_{e,p} + \vec{E}_{r,p} = \vec{E}_{g,p}.\tag{4.10}$$

Im Ursprung ($\vec{r} = 0$) erhalten wir daraus

$$\vec{E}_{e0,p} \cdot \cos(-\omega_e t) + \vec{E}_{r0,p} \cdot \cos(-\omega_r t) = \vec{E}_{g0,p} \cdot \cos(-\omega_g t).\tag{4.11}$$

Diese Stetigkeitsbedingung muss nun in jedem Augenblick, also für alle t erfüllt sein. Schließen wir triviale Lösungen aus, so muss

$$\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega \quad (4.12)$$

gelten. Die Frequenz einer Welle ändert sich an der Grenzfläche zwischen zwei Medien folglich nicht. Die Gleichung (4.10) muss nicht nur zu jedem Zeitpunkt, sondern auch an jeder beliebigen Stelle der Grenzfläche (neben dem Ursprung) erfüllt sein, sodass davon ausgegangen werden darf, dass die Phasen der drei Wellen übereinstimmen. Da wir bereits festgestellt haben, dass außerdem die Frequenz der drei Wellen übereinstimmt, muss

$$\vec{k}_e \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_g \vec{r} \quad (4.13)$$

gelten. Unter Ausnutzung der Kenntnis über die Lage von \vec{r} (in der x - z -Ebene) und \vec{k}_e (in der x - y -Ebene) kann für die Komponenten in x - bzw. z -Richtung gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} k_{ex} &= k_{rx} = k_{gx} \quad \text{und} \\ k_{rz} &= k_{gz} = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

gilt (vgl. [Demtröder 1995]). Die Wellenvektoren der drei Wellen lassen sich dabei gemäß Abb. 9 aufteilen. Da die z -Komponenten der reflektierten und gebrochenen Wellenvektoren verschwinden, bedeutet dies, dass die Wellenvektoren \vec{k}_e , \vec{k}_r und \vec{k}_g in der durch die Einfallrichtung \vec{k}_e und der Normalen auf die Grenzfläche definierten Einfallsebene liegen. Alle drei Wellen pflanzen sich somit in derselben Ebene fort.

Nun beschreibe α den Winkel zwischen dem einfallenden Wellenvektor \vec{k}_e und der Normalen auf der Grenzfläche, α' den Winkel zwischen reflektiertem Wellenvektor \vec{k}_r und der Normalen und β schließlich den Winkel zwischen \vec{k}_g und der Normalen der Grenzfläche in Richtung des Mediums 2 (siehe Abb. 9). Dann erhalten wir

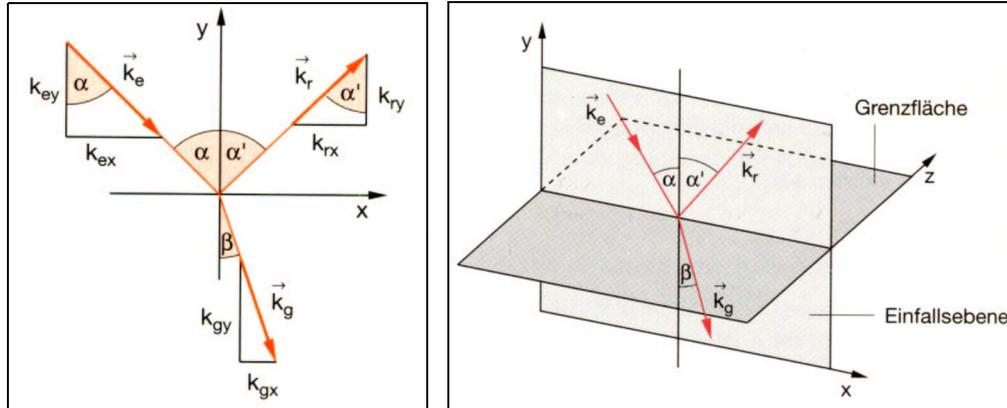


Abbildung 9: Aufteilung der Wellenvektoren an einer Grenzfläche.

Quelle: [Demtröder 1995]

$$\begin{aligned} k_{ex} &= k_e \cdot \sin \alpha, \\ k_{rx} &= k_r \cdot \sin \alpha', \\ k_{gx} &= k_g \cdot \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mit Gleichung (4.14) und der Beziehung

$$|\vec{k}_i| = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{\omega_i}{v_i} = n_i \cdot \frac{\omega_i}{c}$$

zwischen dem Betrag eines Wellenvektors \vec{k}_i , der Wellenlänge λ_i und der Brechzahl n_i im entsprechenden Medium folgt wegen der Konstanz der Frequenz ($\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$)

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \alpha' = n_2 \cdot \sin \beta. \quad (4.16)$$

Einerseits ergibt sich nun das Reflexionsgesetz, welches besagt, dass der Einfallswinkel genauso groß ist wie der Reflexionswinkel:

$$\alpha = \alpha'. \quad (4.17)$$

Das Reflexionsgesetz kann auch aus den Prinzipien von FERMAT und HUYGENS gefolgert und erklärt werden (siehe [Hecht 1992]). Andererseits lässt sich aus Gleichung

(4.16) ein Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel der transmittierten Welle ablesen. Diese Beziehung stellt das nach SNELLIUS benannte Brechungsgesetz dar:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.18)$$

Ein Medium 2 heißt *optisch dichter* als Medium 1, falls $n_2 > n_1$ gilt. Da sowohl der Einfallswinkel α als auch der Brechungswinkel β zwischen 0° und 90° liegen, gilt dann $\alpha > \beta$. Beim Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium wird die Welle also zum Lot hin gebrochen. Beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium erfolgt umgekehrt eine Brechung vom Lot weg. Es gibt somit einen *Grenzwinkel* $\alpha = \alpha_{gr}$, bei dem sogenannte *Totalreflexion* eintritt,

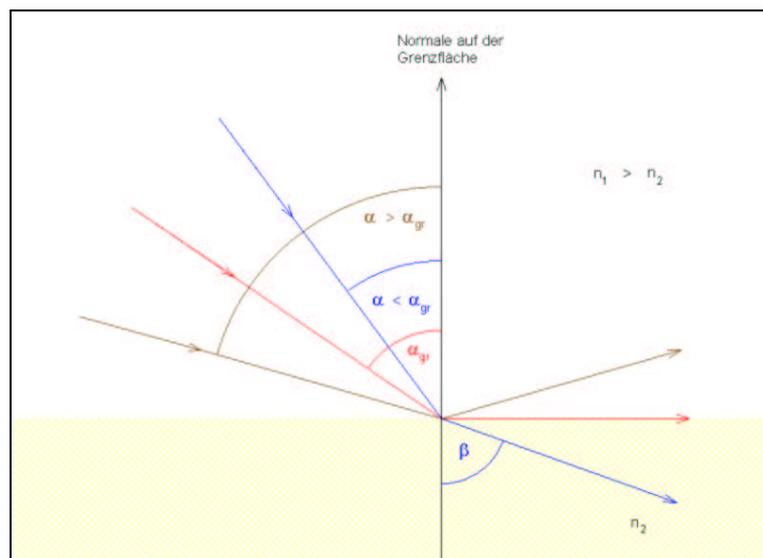


Abbildung 10: Zur Beschreibung von Totalreflexion von Wellen.

d.h. bei dem der Brechungswinkel $\beta = 90^\circ$ ist (siehe Abb. 10). Nach Gleichung (4.18) ist dieser Winkel gegeben durch

$$\sin \alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{gr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

4.3 Abhängigkeiten des Brechungsindex

Der Brechungsindex weist neben dem durch die Maxwell-Relation gegebenen Zusammenhang mit der relativen Dielektrizitätskonstanten Abhängigkeiten von der Wellenlänge der einfallenden elektromagnetischen Welle sowie von Temperatur und Druck auf. Während die Abhängigkeit des Brechungsindex der Luft von der Wellenlänge nur zu (dennoch interessanten) Nebeneffekten bei der Betrachtung von Luftspiegelungen führt, ist die Abhängigkeit von der Temperatur letztendlich entscheidend für das Entstehen von Luftspiegelungen.

4.3.1 Der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge

In Abschnitt 4.1 wurde die Brechzahl n durch die Maxwell-Relation $n = \sqrt{\epsilon_r}$ beschrieben, wenn man von nur schwach magnetischen Stoffen ausgeht. Diese Beziehung zeigt jedoch nicht direkt die Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl $n = n(\lambda)$, die als *Dispersion* bezeichnet wird. Bei *normaler Dispersion* werden kurze Wellen (blaues Licht) stärker gebrochen als lange Wellen (rotes Licht), bei *anormaler Dispersion* ist dies umgekehrt.

Um die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge theoretisch zu behandeln, muss die atomare Natur der Materie miteinbezogen werden. Eine elektromagnetische Welle in einem Medium beeinflusst dessen Ladungsstruktur dahingehend, dass das elektrische Feld die positiven und negativen Ladungen im Medium trennt. Als *elektrische Polarisierung* P wird das resultierende Dipolmoment pro Volumeneinheit bezeichnet, das für die meisten Stoffe durch

$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \cdot E \quad (4.19)$$

beschrieben werden kann. Ausgehend von einem Medium, das sehr viele polarisierbare Atome enthält, können wir annehmen, dass es eine Rückstellkraft gibt, die das System nach kleinen Störungen wieder ins Gleichgewicht bringt. Trifft nun

eine Lichtwelle auf ein solches Medium, so werden die Atome von dem sich zeitlich verändernden elektrischen Feld zu periodischen Schwingungen angeregt, so dass jedes Atom als ein ungedämpfter Oszillator aufgefasst werden kann. Das elektrische Feld breitet sich in x -Richtung aus. Nach NEWTON ergibt sich dann die Bewegungsgleichung

$$q_e E_0 \cos \omega t - m_e \omega_0^2 x = m_e \ddot{x}, \quad (4.20)$$

wobei q_e die schwingende Ladung eines Elektrons, ω die Frequenz der elektromagnetischen Welle und ω_0 die Eigenfrequenz des schwingenden Elektrons und m_e die Masse des Elektrons bezeichnen sollen. Der erste Summand stellt die Antriebskraft dar, der zweite Summand beschreibt die entgegengerichtete Rückstellkraft. Eine Lösung wird durch die Verschiebung des Oszillators

$$x(t) = \frac{q_e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot E_0 \cos \omega t = \frac{q_e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot E(t) \quad (4.21)$$

beschrieben. Das Produkt aus der Ladung q_e , der Verschiebung x und der Anzahl N der beitragenden Elektronen pro Volumeneinheit ergibt das resultierende Dipolmoment pro Volumeneinheit und somit die elektrische Polarisation

$$P = q_e x N = \frac{q_e^2 N E}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Mit Gleichung (4.19) ergibt sich zunächst

$$(\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 = \frac{N q_e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

und unter Ausnutzung der Maxwell-Relation (4.5) mit $\mu_r = 1$ erhält man schließlich die sogenannte *Dispersionsgleichung*:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4.22)$$

Für Frequenzen ω unterhalb der Resonanzfrequenz ω_0 ist der Ausdruck $(\omega_0^2 - \omega^2)$ positiv und somit der Brechungsindex größer als 1. Umgekehrt wird der Wert des

Brechungsindex kleiner als 1, wenn die Frequenzen über die Resonanzfrequenz wachsen.

In der Regel finden derartige Übergänge der Brechzahl von $n > 1$ zu $n < 1$ für jeden Stoff statt, wenn die Beleuchtungsfrequenz erhöht wird. Ein Frequenzbereich eines Stoffes, der die Resonanzfrequenz ω_0 direkt umgibt, wird *Absorptionsbande* genannt. Für den Fall, dass sich die Frequenz der einfallenden Welle deutlich von der Resonanzfrequenz ω_0 unterscheidet, gibt es wenig Absorption, wohingegen der einfallenden Welle bei Resonanz elektromagnetische Energie entzogen und diese Energie in mechanische Energie umgewandelt wird. Die bei diesem Vorgang verlorengewangene Wellenenergie dissipiert thermisch innerhalb der jeweiligen Substanz. Für diesen Intensitätsverlust $-dI$ wählt man den Ansatz

$$dI = -\beta I dx, \quad (4.23)$$

da der Intensitätsverlust proportional zur einfallenden Intensität I und zur Wegstrecke dx ist. Durch den Absorptionskoeffizienten β werden weitere Eigenschaften des Mediums (wie seine Dichte) und der Welle (Frequenz) ausgedrückt ([Gerthsen 1995]). Integration des obigen Ansatzes (4.23) liefert die Intensität I zu

$$I = I_0 e^{-\beta x}, \quad (4.24)$$

die nach einer endlichen Eindringtiefe x noch von einer Anfangsintensität I_0 übrig ist.

Die Eigenfrequenzen farbloser transparenter Gase, zu denen die Luft als Gasgemisch gezählt werden kann, liegen oberhalb des sichtbaren Bereichs des Lichts (vgl. [Hecht 1992]). Da also $\omega_0^2 \gg \omega^2$, kann ω^2 vernachlässigt werden und wir erhalten aus (4.22) für den sichtbaren Bereich einen im Wesentlichen konstanten Brechungsindex für farblose transparente Gase bei fester Temperatur (bzw. einen nur schwach wellenlängenabhängigen Brechungsindex (siehe Tab. 1 auf Seite 34)). Des

Weiteren lässt sich aus der Dispersionsgleichung (4.22) Folgendes ablesen: Der Brechungsindex wird bei normaler Dispersion mit steigender Atomzahldichte immer größer.

4.3.2 Der Brechungsindex von Luft in Abhängigkeit von Temperatur und Druck

Die Brechzahl eines Mediums hängt neben der Wellenlänge der einfallenden elektromagnetischen Welle von der Temperatur und dem Druck ab. Bei Gasen ist der Brechungsindex – wie im vorigen Abschnitt beschrieben – mit deren Dichte verbunden, das heißt mit der Dichte der schwingenden Dipole, also der Atomzahldichte des Gases. Aus der allgemeinen Gasgleichung (siehe (4.27)) lässt sich bereits schließen, dass ein Ansteigen der Temperatur eines Gases bei gleichbleibendem Druck ein Anwachsen des Volumens und somit eine geringere Dichte hervorruft.

Für die atmosphärische Luft als Gasgemisch kann ein einheitlicher temperaturabhängiger Brechungsindex verwendet werden, da sich die Zusammensetzung der Luft in der unteren Atmosphäre – bis auf den Wasseranteil – nicht wesentlich ändert. Die atmosphärische Luft besteht hauptsächlich aus Stickstoff und Sauerstoff, deren Brechungsindizes für die Spektrallinie D_1 ($\lambda = 589 \text{ nm}$) unter Normalbedingungen 1,0002969 (Stickstoff) und 1,0002706 (Wasserstoff) betragen ([Dietze 1957]). Auf diese Weise ergeben die Brechungsindizes für trockene Luft unter Normaldruck (1013 hPa) die in Tab. 1 aufgeführten Werte. Insbesondere erkennt man die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex. Obwohl sich der Brechungsindex bei einer Temperaturerhöhung von $20^\circ C$ nur um gut $1,5 \cdot 10^{-5}$ ändert, stellt diese Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur die Grundlage für das Entstehen der Luftspiegelungen dar.

Ein formaler Zusammenhang zwischen der Brechzahl von Luft und der Temperatur

Wellenlänge $\lambda[nm]$	$(n - 1) \cdot 10^4$ bei $0^\circ C$	$(n - 1) \cdot 10^4$ bei $20^\circ C$
400	2,983	2,825
500	2,943	2,790
600	2,922	2,770
700	2,910	2,758
800	2,902	2,750

Tabelle 1: Brechungsindizes von trockener Luft unter Normaldruck (1013 hPa).

Quelle: [Dietze 1957] und [Demtröder 1995]

T bzw. dem Druck p lässt sich mithilfe der durch Versuche gefundenen Beziehung

$$n^2 = 1 + 2s\delta \tag{4.25}$$

zwischen dem Brechungsindex n der Luft und dem Verhältnis δ der Dichte der Luft zur normalen Dichte, die sich unter Normaldruck $p_0 = 1013 \text{ hPa}$ bei $T_0 = 0^\circ C$ einstellt, herstellen ([Pernter u.a. 1922]). Dabei bezeichnet s eine von der Wellenlänge des Lichts abhängige Größe, die im Mittel aber für weißes Licht zu 0,000293 angenommen werden kann. Für den Brechungsindex kann nun die Näherung

$$n = 1 + s\delta \tag{4.26}$$

genutzt werden, da

$$(1 + s\delta)^2 = 1 + 2s\delta + \underbrace{s^2\delta^2}_{\approx 0} = n^2$$

wegen der geringen Größe von s gilt. Aus der allgemeinen Gasgleichung

$$pV = \nu RT \tag{4.27}$$

ergibt sich die Dichte ρ zu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \tag{4.28}$$

wobei ν die Molzahl des Gases, M die molare Masse, m die Masse der betrachteten Gasmenge, R die universelle Gaskonstante und ϱ die Dichte des Gases bezeichnen. Daraus ergibt sich mit der Normaltemperatur $T_0 = 0^\circ C$ die relative Dichte zu

$$\delta = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{pT_0}{p_0T}. \quad (4.29)$$

Auf diese Weise erhält man nach Einsetzen von s und δ in Gleichung (4.26) eine Formel für den Brechungsindex von Luft in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem Druck p :

$$n = 1 + 0,000293 \cdot \frac{pT_0}{p_0T} \quad (4.30)$$

Unter Normalbedingungen ergibt sich der Brechungsindex für trockene Luft demnach zu $n = 1,000293$, der sich nach Tab. 1 etwa auch bei Beleuchtung mit grünem Licht einstellt.

4.4 Geometrische Optik

Für die Beschreibung vieler optischer Phänomene empfiehlt es sich, sich von der Wellennatur des Lichts zu lösen und sogenannte *geometrische Optik* oder *Strahlenoptik* zu betreiben. Der Vorteil liegt darin, dass die geometrische Optik eine wesentlich einfachere Behandlung, deren Genauigkeit im Allgemeinen völlig ausreicht, bestimmter optischer Phänomene erlaubt. Die Untersuchung der wirklichen elektromagnetischen Welle in optischen Anordnungen wäre äußerst kompliziert, da man gekrümmte Grenzflächen (z.B. beim Zylinder- oder Kegelspiegel) mit unterschiedlichen Brechzahlen (z.B. bei Luftspiegelungen) behandeln müsste. Angenommen das Licht einer Punktlichtquelle breite sich durch eine von ihr ausgehende Kugelwelle radial in alle Richtungen aus; dann können Lichtstrahlen als Normalen auf die Wellenfront interpretiert werden. Begrenzt man die Ausbreitungsmöglichkeiten einer Lichtwelle durch Blenden oder Spiegel, so erhält man ein Lichtbündel, das als Gesamtheit vieler Lichtstrahlen betrachtet werden kann.

Bei dem Begriff *Lichtstrahl* handelt es sich um eine Idealisierung der wirklichen Verhältnisse, die die Behandlung zahlreicher optischer Erscheinungen vereinfacht. Die Idealisierung besteht darin, dass ein schmales Lichtbündel, das immer noch eine gewisse Ausdehnung besitzt, als ein Strahl im geometrischen Sinne aufgefasst wird. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgen mit der Näherung $\lambda \rightarrow 0$ als Grenzfall die Gesetzmäßigkeiten der Strahlenoptik. Die Näherung darf angewendet werden, wenn der Querschnitt des Lichtbündels groß gegen die Wellenlänge des Lichts ist, da dann Beugungseffekte vernachlässigt werden können.

Für die Ausbreitung von Lichtstrahlen können dann unter Beachtung des Reflexionsgesetzes (4.17) und des Brechungsgesetzes (4.18) geometrische Gesetze angewandt werden. Die Überlagerung von Licht erfolgt dabei in ungestörter Superposition, d.h. Lichtstrahlen, die sich kreuzen, beeinflussen sich nicht gegenseitig. Des Weiteren breitet sich ein Lichtstrahl in einem homogenen Medium (d.h. $n = \text{const.}$) geradlinig aus, während es in inhomogenen Medien aufgrund der von 0 verschiedenen Brechzahländerung zu gekrümmten Lichtstrahlen kommt.

Der von den Lichtstrahlen zurückgelegte Weg lässt sich auch durch Anwendung des *Fermatschen Prinzips* beschreiben, welches besagt, dass die Lichtstrahlen stets dem Weg zwischen Anfangs- und Endpunkt eines Lichtweges folgen, für den die Lichtlaufzeit ein Minimum besitzt (vgl. [Hecht 1992]).

4.4.1 Reflexion am ebenen Spiegel

Fällt ein Strahlenbündel, das von einem Gegenstand ausgeht, auf die Oberfläche eines ebenen Spiegels, so wird es von diesem mehr oder weniger stark reflektiert. Da das Streuvermögen eines ebenen Spiegels ungefähr als 0 angenommen werden kann, wird ein Strahlenbündel, das auf einen ebenen Spiegel trifft, nach dem Reflexionsgesetz in eine ganz bestimmte Richtung reflektiert. Die rückwärtigen Verlängerungen der das Lichtbündel berandenden Lichtstrahlen eines Gegenstandspunkts schneiden

sich in einem Punkt hinter dem ebenen Spiegel, von dem die reflektierten Strahlen auszugehen scheinen. Auf diese Weise ergibt sich ein virtuelles Bild (siehe Abb. 11). Für die Reflexion am ebenen Spiegel lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten zusam-

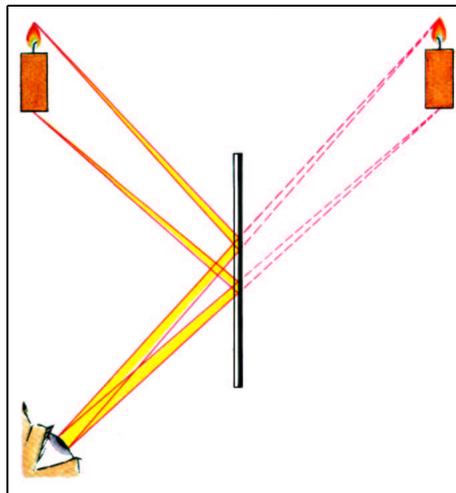


Abbildung 11: Ein ebener Spiegel bildet einen Gegenstand in ein gleich großes, virtuelles Bild ab. Quelle: [Boysen u.a. 1994]

menfassen:

- Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich groß (Reflexionsgesetz).
- Ein ebener Spiegel erzeugt von einem Gegenstand ein virtuelles Bild, das sich scheinbar ebensoweit hinter dem Spiegel befindet, wie der Gegenstand davor steht.
- Das Bild erscheint genauso groß wie der Gegenstand, wenn dieser sich dort befände, wo das virtuelle Bild „entsteht“.
- Gegenstand und Spiegelbild sind achsensymmetrisch bezüglich der Spiegelebene, d.h. im Spiegel sind vorne und hinten vertauscht, während rechts und links

sowie oben und unten gegenüber dem originalen Gegenstand nicht verändert werden.

- Der Lichtweg ist bei der Reflexion am ebenen Spiegel umkehrbar.

Es kann also festgehalten werden, dass der ebene Spiegel jeden Gegenstandspunkt überall unverzerrt und ohne Vergrößerung abbildet.

4.4.2 Reflexion am Zylinderspiegel

Betrachtet man nun einen Zylinderspiegel in der horizontalen Reflexionsrichtung, so kann man bei Reflexion an seiner Innenseite von einem Hohlspiegel (Konkavspiegel), im anderen Falle von einem Wölbspiegel (Konvexspiegel) ausgehen, während der Zylinderspiegel in der vertikalen Reflexionsrichtung die Eigenschaften eines ebenen Spiegels aufweist.

Da jedes hinreichend kleine Flächenelement einer gekrümmten Fläche als eben betrachtet werden kann, ist es legitim, auch bei gekrümmten Spiegeln die Gesetze des ebenen Spiegels anzuwenden. Auf einen Konvexspiegel treffende, parallele Lichtbündel werden nach dem Reflexionsgesetz (4.17) so gespiegelt, dass die reflektierten Strahlen stets divergieren (siehe Abb. 12, links). Sie scheinen von einem Punkt auszugehen, der in der Mitte zwischen Spiegeloberfläche und Krümmungsmittelpunkt liegt. Dieser Punkt wird als *Brennpunkt* F des Spiegels bezeichnet. Beim Zylinderspiegel ist für paraxiale Lichtstrahlen die *Brennweite* f gleich dem halben Zylinderradius und es gilt die allgemein gültige Abbildungsgleichung für Hohl- und Konvexspiegel

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (4.31)$$

Dabei bezeichnen g die Gegenstandsweite und b die Bildweite. Für den Zylinderspiegel als Kombination eines Konvex- (in horizontaler Richtung) und Planspiegels (in vertikaler Richtung) ist f negativ zu wählen, da f einen Abstand „hinter“ dem

Spiegel bezeichnet. Die Abbildungsgleichung liefert dann auch immer ein negatives b , d. h. Konkavspiegel produzieren virtuelle Bilder, die hinter dem Spiegel liegen. Für die Gegenstandsgröße G und die Bildgröße B gilt:

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b}. \quad (4.32)$$

Daraus ergibt sich für den Abbildungsmaßstab V eines von außen betrachteten Zylinderspiegels:

$$V = \frac{B}{G} = \frac{g}{b} < 1. \quad (4.33)$$

Die Verkleinerung resultiert aus der konvexen Krümmung der Spiegeloberfläche und der dadurch bedingten divergierenden Reflexion, die dazu führt, dass die Bildweite b stets kleiner als die Gegenstandsweite g ist. Die Form der Spiegelbilder, die bei der Reflexion an einem Zylinderspiegel entstehen, lässt sich aus den Eigenschaften der Reflexion am Konkav- und Planspiegel ableiten (vgl. [Thomas 1981]).

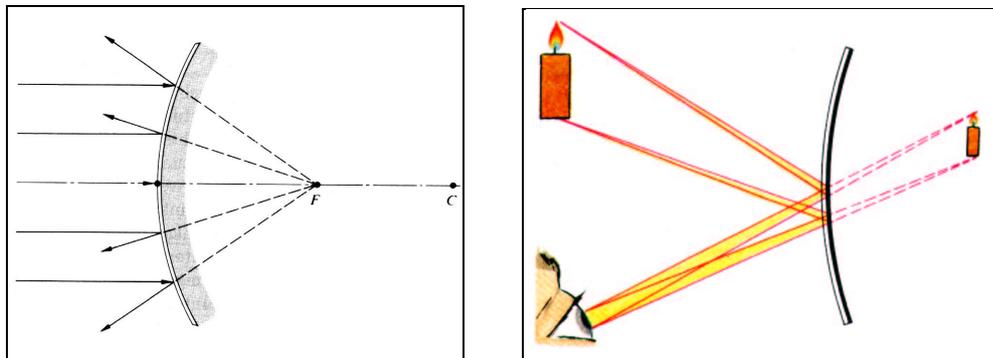


Abbildung 12: In der konvexen Krümmungsrichtung wirkt ein Zylinderspiegel wie ein Wölbspiegel. Nach der Reflexion laufen Lichtbündel stärker auseinander und erzeugen in ihrer rückwärtigen Verlängerung ein stets virtuelles, aufrechtes und verkleinertes Spiegelbild.

Quelle: [Hecht 1992] bzw. [Boysen u.a. 1994]

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Bilder, die sich durch Reflexion an der Außenseite eines Zylinderspiegels ergeben, stets virtuell, aufrecht und längs der konvexen Krümmungsrichtung verkleinert sind (siehe Abb. 12, rechts).

Lässt man auch achsenferne, parallele Strahlen zu, so schneiden sich die reflektierten Strahlen (Hohlspiegel) bzw. die rückwärtigen Verlängerungen der Reflexionsstrahlen (Wölbspiegel) nicht genau im Brennpunkt, sondern auf einer Kaustik (Brennlinie), die eine Epizykloide darstellt.

5 Beispiele zur Herstellung von Anamorphosen

5.1 Anamorphotische Raster

Neben der freihändigen Konstruktion anamorphotischer Bilder gibt es eine Fülle weiterer Möglichkeiten, Anamorphosen herzustellen. Eine Möglichkeit ist dabei die Übertragung einer Bildvorlage mit einer quadratischen Rastereinteilung in ein entsprechend verzerrtes Raster. Eine solche geometrische Konstruktion ist um einiges genauer als die freihändige, jedoch stellen die üblicherweise benutzten, verzerrten Raster häufig nur eine Näherung dar, sodass die konstruierten Anamorphosen nicht ganz exakt sind.

5.1.1 Perspektivisches Raster

Eine Methode zur Konstruktion eines anamorphotischen Rasters beschreibt Jean-François NICERON in seinem Werk *Thaumaturgus Opticus*, das im Jahr 1646 erschien. Es handelt sich dabei um die traditionelle Perspektivkonstruktion, die Abb. 13 mit P als Fluchtpunkt und R als Distanzpunkt zeigt.

Bei der Konstruktion des verzerrten Rasters für eine perspektivische Anamorphose ist wie folgt vorzugehen: Eine Bildvorlage wird mit einem quadratischen Raster überzogen, wobei gilt, dass die Anamorphose umso besser erscheint, desto kleiner die Gitterabstände gewählt werden. Die Eckpunkte des Quadrats seien die Punkte A , B , C und D . Nun wird der Fluchtpunkt P in einer beliebigen horizontalen Entfernung von der Strecke \overline{BC} festgelegt. Im anamorphotischen Raster seien die Eckpunkte mit den Kleinbuchstaben a , b , c und d bezeichnet. Vom Fluchtpunkt P aus werden nun in äquidistanten Abständen Verbindungslinien zu den Punkten a , e , f , g , h , i , d des anamorphotischen Rasters gezogen, und zwar genau in der Länge, die der Größe der Anamorphose entsprechen soll. Die gefundenen Punkte des verzerrten Rasters sind anschließend zu verbinden.

Nun ist der Distanzpunkt R , von dem aus die Anamorphose betrachtet werden soll, zu wählen. Er befindet sich in dem Abstand, den auch das Auge über der Papierfläche einnehmen soll, senkrecht über dem Fluchtpunkt P in der Zeichenebene. Das anamorphotische Gitter erhält man nun, indem man eine Diagonale vom Distanzpunkt R zum Eckpunkt d des anamorphotischen Rasters zeichnet. Aus den Schnittpunkten der Diagonalen mit den Verbindungslinien (von P mit a, e, f, g, h, i und d) ergeben sich die Verkürzungen der Abstände in der Horizontalen. Die verzerrte horizontale Unterteilung ergibt sich, wenn durch diese Schnittpunkte Linien senkrecht zur Bildachse gezogen werden. Nun lässt sich jeder quadratische Aus-

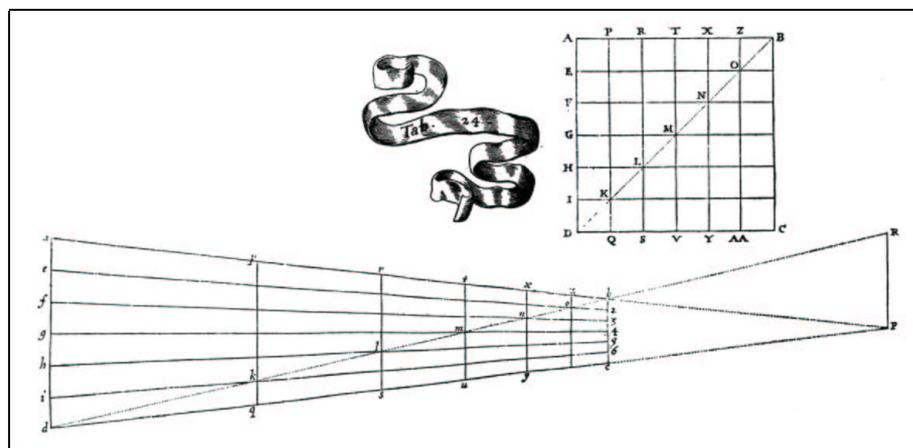


Abbildung 13: Konstruktionsschema zur Herstellung einer perspektivischen Anamorphose nach NICERON. Quelle: [Elffers u.a. 1975]

schnitt der Bildvorlage in das entsprechende Trapez des anamorphotischen Rasters übertragen, und man erhält eine perspektivische Anamorphose.

5.1.2 Raster für katoptrische Anamorphosen

Ebenso wie für die perspektivische Anamorphose findet man bei NICERON Konstruktionsskizzen zur Erstellung von Kegel- und Zylinderanamorphosen. Wie man

in Abb. 14 (rechts) erkennen kann, treffen sich bei NICERON die Linien, die im Zylinderspiegel vertikal erscheinen, im Mittelpunkt der Anamorphose. Geht man von in der Draufsicht auf den Spiegelzylinder parallel zueinander einfallenden Lichtstrahlen aus, die nach dem Reflexionsgesetz am Spiegelkreis reflektiert werden, so ergibt die tangentielle Kurve an die rückwärtigen Verlängerungen der Reflexionsstrahlen im Spiegelkreis gerade die vom Hohlspiegel bekannte Kaustik. Obwohl diese Raster also nur Näherungen darstellen, erscheint das Spiegelbild mithilfe solcher Raster erstellter Anamorphosen im entsprechenden Anamorphoskop in hohem Maße unverzerrt, sodass die Herstellung einer Anamorphose nach diesem Rasterprinzip durchaus lohnenswert ist. Die Methode von NICERON stellt seither die Grundlage anamorpho-

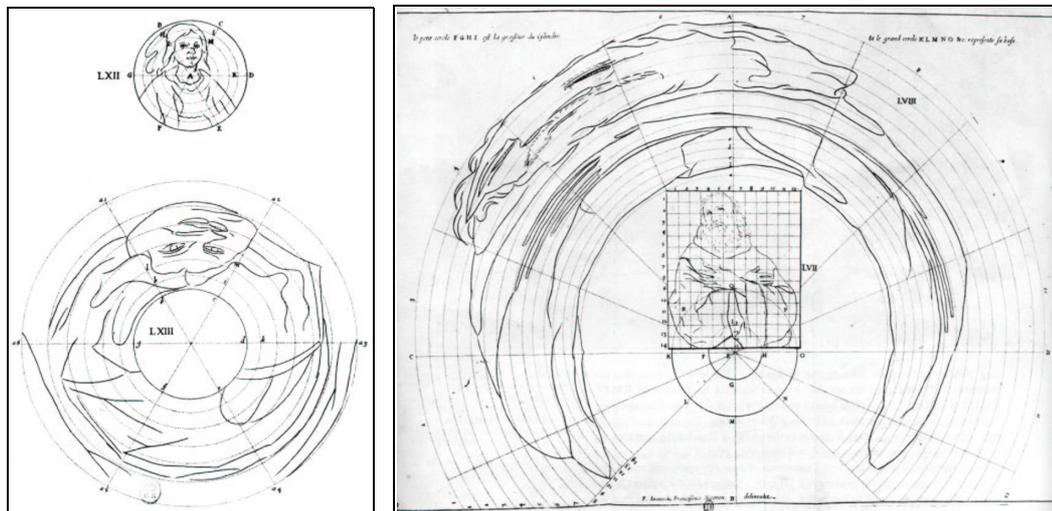


Abbildung 14: Konstruktionsschema zur Herstellung einer Kegelanamorphose (links) bzw. einer Zylinderanamorphose (rechts) nach NICERON.
Quelle: [Baltrusaitis 1977]

tischer Raster dar. Im Handel erhältliche, verzerrte Koordinatensysteme für Zylinderanamorphosen basieren auf dieser Methode; sie beinhalten zum Teil jedoch leicht verbesserte Varianten dieser Näherungslösung, da sie beispielsweise die Kaustik des

Spiegels berücksichtigen (vgl. Beilage der Buch-Aktiv-Box [Marchand 1996]). Mithilfe eines Experiments, das auch in der Schule durchführbar ist, lässt sich ein korrektes anamorphotisches Raster für jede beliebige Blickrichtung herstellen, indem man einen Laserstrahl vom Augpunkt auf den entsprechenden Spiegel fallen lässt, seinen Auftreffpunkt auf der Grundebene betrachtet und diesen markiert. Diese Methode wird als Ray-Tracing-Verfahren bezeichnet, auf das im Abschnitt 5.5 näher eingegangen wird. Im Folgenden wird dieses Verfahren exemplarisch für einen Zylinderspiegel beschrieben.

Versuchsaufbau zur Erstellung eines Rasters für Zylinderanamorphosen

Der Versuchsaufbau ist im Wesentlichen Abb. 15 zu entnehmen. Auf ein weißes

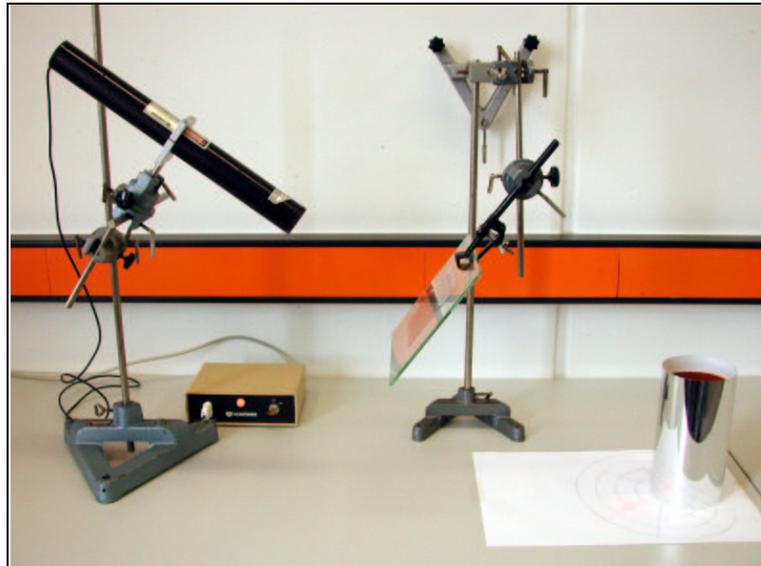


Abbildung 15: Versuchsaufbau zur Erstellung eines anamorphotischen Rasters.

Blatt DIN-A3-Papier wird ein Zylinderspiegel gestellt. Hier wurde ein Stück eines handelsüblichen Abflussrohres mit einem Durchmesser von 110 mm benutzt. Die Oberfläche des Rohres sollte, bevor sie mit einer Spiegelfolie versehen wird, auf

Glattheit geprüft werden. Kleine Unebenheiten auf der Oberfläche ergeben in der Reflexion große Ungenauigkeiten. Die Spiegelfolie sollte daher nicht auf das Rohr geklebt, sondern nur um das Rohr gelegt und mit durchsichtigem Klebeband fixiert werden. So wird eine gleichmäßige Krümmung der Spiegelfolie gewährleistet. Die hier benutzte Spiegelfolie, die es im Baumarkt OBI als Meterware zu kaufen gibt, weist gute Spiegeleigenschaften auf. Ein quadratisches Raster wird so in den Strahlengang zwischen Laser und Zylinderspiegel gebracht, dass der Laserstrahl durch die Mitte dieses Rasters senkrecht auf der Rasterebene steht.

Versuchsdurchführung

Der Laser muss so positioniert werden, dass der Laserstrahl mit der Blickrichtung des Betrachters übereinstimmt. Fährt man nun mit dem Laser ein quadratisches Raster ab, so ergibt sich auf der Grundebene das korrekte anamorphotische Raster. Für einen Betrachter aus endlicher Entfernung ist dabei der jeweilige Winkel, unter dem der Laserstrahl auf das unverzerrte Raster trifft, zu ändern, während der Laser für eine Betrachtung aus unendlicher Entfernung unter Beibehaltung des Winkels in der Vertikalen und Horizontalen bewegt werden muss.

Versuchsergebnisse

Bei Betrachtung aus endlicher Entfernung erhält man bei exakter Ausführung dann nicht wie bei NICERON ein verzerrtes Raster mit konzentrischen Kreisen und vertikalen Geraden, die im Mittelpunkt der Anamorphose zusammenlaufen, sondern eines, in dem die geraden, vertikalen Linien des quadratischen Rasters auf gekrümmte Linien transformiert werden. Den waagerechten Linien des Ursprungsrasters entsprechen im verzerrten Raster kreisähnliche Bögen, wie sie in Abbildung 16 zu sehen sind. Im Spiegelbild ist wieder ein unverzerrtes quadratisches Raster zu erkennen. Bei Betrachtung aus unendlicher Entfernung werden die vertikalen Geraden des unverzerrten Rasters hingegen auf Geraden transformiert, die jedoch auch nicht im Mit-

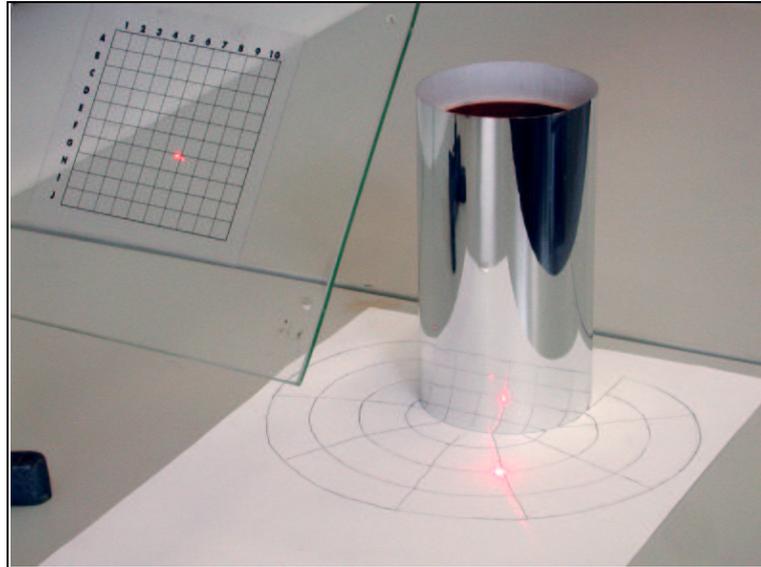


Abbildung 16: Mithilfe eines Laserstrahls ist es möglich, den Verlauf der Lichtstrahlen sichtbar zu machen und selbst ein Raster für Zylinderanamorphosen zu erstellen.

telpunkt des Spiegelkreises zusammenlaufen. Um im Spiegelbild eine Bildvorlage mit der ursprünglichen Orientierung unverzerrt wahrnehmen zu können, ist zu beachten, dass das Motiv natürlich kopfstehend und spiegelverkehrt in das neu erhaltene Raster einzutragen ist, da die Ausschnitte zwischen den äußersten Kreisbögen den Quadraten in der obersten Zeile des unverzerrten Rasters entsprechen. Mithilfe einer entsprechenden Beschriftung des neu gewonnenen Rasters sollte es jedem möglich sein, die quadratischen Ausschnitte der Bildvorlage korrekt in das anamorphotische Gitter zu übertragen.

Versuchsauswertung

Die Erstellung eines anamorphotischen Rasters ist mithilfe dieses Versuches sehr anschaulich für den Schüler, zumal dieser Versuchsaufbau den Strahlengang am Zylinderspiegel sehr deutlich demonstriert. Das Ergebnis, das man erhält, ist in-

sofern sehr brauchbar, als es per Konstruktion auf einen vorhandenen Spiegel und einen gewünschten Blickwinkel angepasst ist.

Eine weitere Möglichkeit, ein anamorphotisches Raster für eine Zylinderanamorphose zu konstruieren, liegt in der Ausnutzung der Kaustik eines Hohlspiegels. Die Kaustik beschreibt eine Zykloide, deren Spitze im Brennpunkt F des Spiegels liegt (siehe Abb. 17. Sie entsteht, wenn man einen Kreis vom Radius der halben Brennweite auf einem um den Spiegelmittelpunkt O beschriebenen Kreis mit dem Radius der Brennweite abrollt; die Zykloide wird dann durch die Spur desjenigen Punktes des kleinen Kreises beschrieben, der den großen Kreis ursprünglich berührt, links).

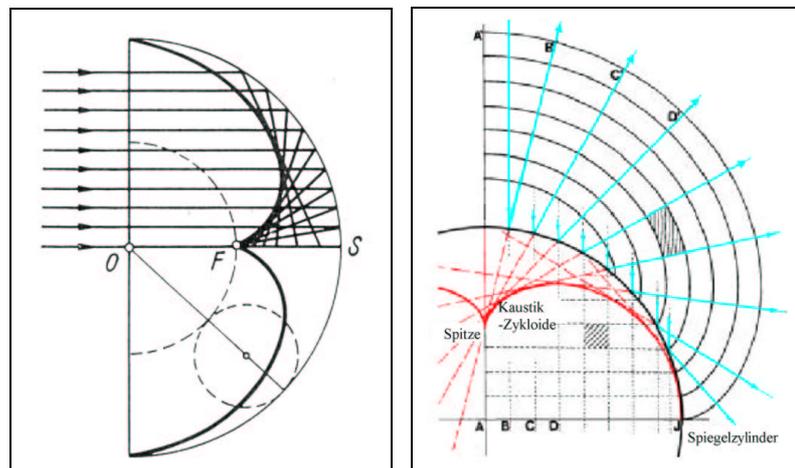


Abbildung 17: Die bekannte Kaustik am Hohlspiegel kann zur Erstellung eines anamorphotischen Rasters ausgenutzt werden.

Quelle: [Bergmann 1966] bzw. [Ucke 1999]

Die Spur eines solchen Ortspunktes lässt sich beispielsweise mit der an vielen Schulen vorhandenen dynamischen Geometriesoftware *EUKLID DynaGeo* aufzeichnen. Schneidet man diese Zykloide nun aus und modelliert beispielsweise ein Stück Holz in dieser Form, so kann man mithilfe eines Fadens und eines Bleistifts ein anamor-

photisches Raster erstellen (siehe Abb. 17, rechts). Dazu muss das eine Ende des Fadens an der Spitze der Zykloide befestigt werden, an das andere Ende wird der Bleistift angebracht. Nun können die kreisähnlichen Bögen gezeichnet werden, indem der Bleistift an dem über das modellierte Holzstück gestrafften Faden über ein weißes Blatt bewegt wird. Der Faden ist dabei für jeden Bogen in der Weise zu kürzen, dass die Bögen jeweils am Schnittpunkt des Spiegelkreises mit einer horizontalen Linie des unverzerrten, quadratischen Rasters beginnen. Die Linien des anamorphotischen Rasters, die im Spiegelbild die vertikalen Linien bilden, werden so konstruiert, dass sie die Zykloide tangential berühren und gleichzeitig durch die verschiedenen Schnittpunkte der unverzerrten, horizontalen Linien mit dem Spiegelkreis verlaufen.

5.2 Mathematische Beschreibung von Anamorphosen

5.2.1 Zylinderanamorphosen

Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Anamorphosenkoordinaten für eine Zylinderanamorphose hergeleitet werden. Zum einen werden die kartesischen Koordinaten der Bildvorlage in Polarkoordinaten des Anamorphosenpunkts transformiert (vgl. [Ullrich 1996a]), zum anderen werden sie direkt wieder als kartesische Koordinaten in Abhängigkeit der ursprünglichen Koordinaten bestimmt (vgl. [Bürger 1992a]). Dabei soll zunächst darauf eingegangen werden, wie die Zylinderanamorphose vom Betrachtungswinkel des Beobachters abhängt.

Schrägbetrachtung

Die Transformation eines Bildpunktes einer Bildvorlage in seinen Anamorphosenpunkt hängt sowohl vom Zylinderradius als auch von der Lage des Augpunkts ab. Dabei ist die Höhe h des Augpunkts entscheidend dafür, wie die zu berechnende Anamorphose gestreckt werden muss, damit sie im Zylinderspiegel für den Betrach-

ter wieder vollständig entzerrt erscheint. Von diesem Umstand abgesehen, genügt es tatsächlich – wie in den folgenden Abschnitten vorgeführt wird – zweidimensionale geometrische Optik anzuwenden. Dazu betrachtet man die senkrechten Projektionen des Augpunkts eines Betrachters und des Spiegelpunkts in die Grundebene, auf der der Zylinder steht. Der Spiegelpunkt ist durch den Schnittpunkt des Lichtstrahls vom Auge zum Punkt der Bildvorlage mit dem Spiegelzylinder gegeben.

Um auch dem Umstand, dass bei Schrägbetrachtung des Anamorphoskops die berechnete Anamorphose im oberen Bildteil leicht verkürzt erschiene, Rechnung zu tragen, soll im Folgenden eine näherungsweise Berechnung des Koordinatensystems der Zylinderanamorphose erläutert werden. Im Spiegelbild erscheint das kartesische Koordinatensystem dann mit horizontal und vertikal gleichen Gitterabständen. Es ist notwendig die Schrägbetrachtung zu beachten, da eine Bildvorlage, die unter senkrechter Betrachtung unverzerrt, unter Schrägbetrachtung jedoch verzerrt erscheint. Es ist nun unerheblich, ob im Vorfeld der Berechnung der Anamorphosenpunkte die Punkte der Bildvorlage entsprechend gestreckt werden, oder ob nach der Berechnung der Anamorphosenpunkte das Koordinatensystem der Zylinderanamorphose in geeigneter Weise gestreckt wird. Die Abhängigkeit des Spiegelbildes von der Höhe bzw. vom Betrachtungswinkel rechtfertigt die heutzutage benutzte, nach außen größer werdene Rastereinteilung, da äquidistante Rastereinteilungen – wie bereits erwähnt – bei Schrägbetrachtung im oberen Teil des Spiegelbilds gestaucht erscheinen würden. Gemäß Abb. 18 folgt aus dem Sinussatz

$$\frac{na}{\sin(\varepsilon - \delta_n)} = \frac{y_n}{\sin(90^\circ + \delta_n)}, \quad (5.1)$$

wobei a den gewünschten Rasterabstand in y -Richtung bezeichnet, der der Einfachheit halber genauso groß wie der Rasterabstand in x -Richtung sein sollte, und n die Anzahl dieser Abstände auf der y -Achse. So folgt mit $\sin(90^\circ + \delta_n) = \cos \delta_n$ für y_n :

$$y_n = \frac{na \cos \delta_n}{\sin(\varepsilon - \delta_n)}.$$

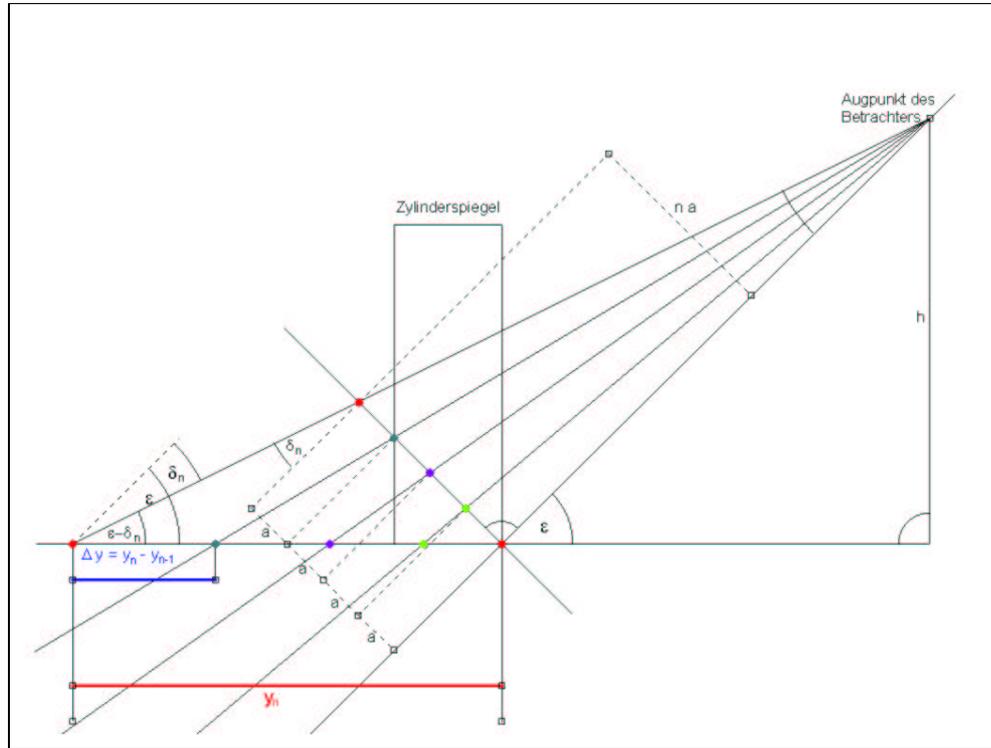


Abbildung 18: Abhängigkeit einer Zylinderanamorphose vom Betrachtungswinkel.

Weiterhin gilt $\tan \delta_n = \frac{na \sin \varepsilon}{h}$ und $\sin(\varepsilon - \delta_n) = \sin \varepsilon \cos \delta_n - \cos \varepsilon \sin \delta_n$.

Damit erhält man für y_n :

$$y_n = \frac{na}{\sin \varepsilon - \cos \varepsilon \tan \delta_n} = \frac{na}{\sin \varepsilon (1 - \cos \varepsilon \cdot \frac{na}{h})} \quad (5.2)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die Rastereinteilung in der Grundebene berechnen, die bei Betrachtung unter dem Winkel ε im Zylinderspiegel ein unverzerrtes quadratisches Raster erscheinen lässt. Während die Abstände auf dem unverzerrten, quadratischen Raster in x - und y -Richtung gleich groß sind, muss die Rastereinteilung in der Grundebene stets größer werden. y_n bezeichnet den Abstand des Nullpunktes des Rasters vom n -ten Rasterpunkt. Mit Gleichung (5.2) werden die gleich großen Rasterabstände na jeweils um den Faktor $\frac{1}{\sin \varepsilon (1 - \cos \varepsilon \cdot \frac{na}{h})}$ gestreckt. Bei

Schrägbetrachtung erscheinen die verschiedenen großen Abstände $\Delta y = y_n - y_{n-1}$ im Spiegelbild als gleich große Abstände a .

Geht man bei der Berechnung der Streckung von parallelem Licht aus, so ergibt sich für den Streckungsfaktor einfach $\frac{1}{\sin \varepsilon}$ und für einen beliebigen Rasterpunkt auf der y -Achse gilt dann

$$y_{n,parallel} = \frac{na}{\sin \varepsilon}. \quad (5.3)$$

Gleichung (5.3) ergibt sich als Grenzfall der Betrachtung aus endlicher Entfernung, wenn wir in Gleichung (5.2) die Höhe h gegen ∞ laufen lassen bzw. $\delta_n = 0$ setzen. Dann erhalten wir parallele Lichtstrahlen, für die sich die Streckung in der Grundebene etwas geringer auswirkt (vgl. (5.2) und (5.3)).

Im Übrigen lässt sich jeder Punkt eines Bildes (Bildvorlage oder Anamorphose) durch ein hinreichend feines Raster beschreiben, indem der Rasterabstand a genügend klein und die Anzahl der Gitterpunkte n genügend groß gewählt werden. Es gilt dann für die y -Koordinate eines betrachteten Punktes $y = na$, sodass durch Einsetzen von y für na in Gleichung (5.2) oder (5.3) die neue y -Koordinate eines beliebigen Punktes berechnet werden kann.

Herleitung der Polarkoordinatentransformation

Es wird hier die Frage beantwortet, wo ein Punkt P' auf der Anamorphose liegen muss, damit er bei Betrachtung im Zylinderspiegel als Bildpunkt P mit den Koordinaten x und y erscheint (siehe Abb. 19). Dabei wird davon ausgegangen, dass der Betrachter einen so großen Abstand vom Zylinder einnimmt, dass die Annahme paralleler Lichtstrahlen gerechtfertigt ist. Der Kreismittelpunkt M des Zylindermantels wird hier als Bezugspunkt für das Polarkoordinatensystem und die Blickrichtung des Betrachters als Hauptachse (optische Achse) gewählt.

Es werden im Folgenden der Abstand l des Gegenstandpunktes P' vom Bezugspunkt M sowie der Winkel φ zur optischen Achse jeweils als Funktion der Bildkoordinaten x und y bei bekanntem Radius R des Spiegelzylinders bestimmt.

Nach dem Kosinussatz gilt für den Radius l gemäß Abb. 19:

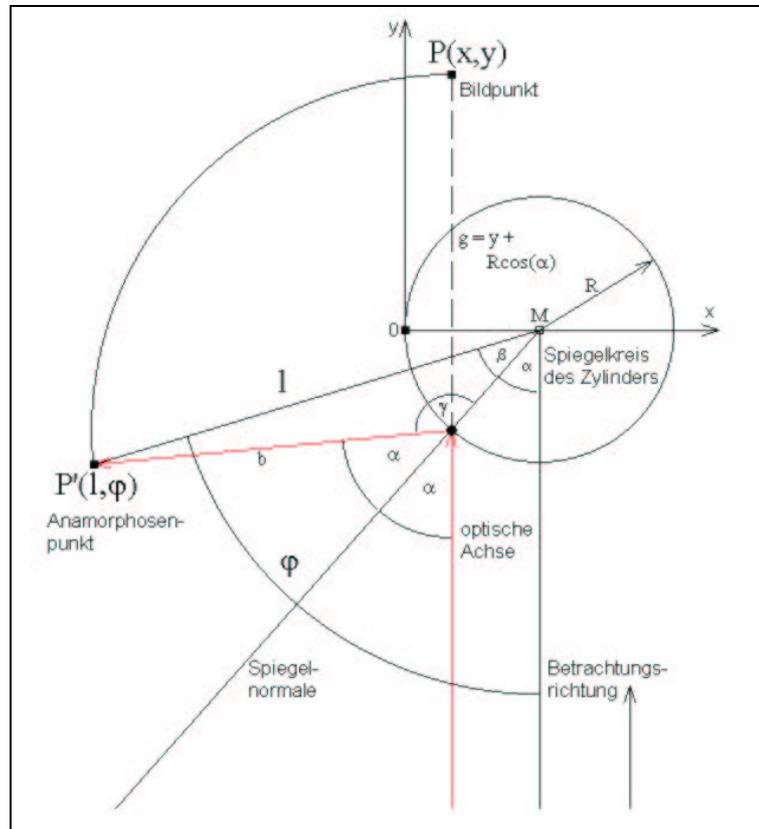


Abbildung 19: Transformation der Bildkoordinaten x und y in Polarkoordinaten l und φ der Zylinderanamorphose.

$$l = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \gamma} \quad (5.4)$$

Wir nehmen nun an, dass ein einfallender Lichtstrahl am Zylinderspiegel den gleichen Gesetzen genügt wie beim Auftreffen auf einen ebenen Spiegel, der den Zylinderspiegel genau im Auftreffpunkt berührt. Die Lage dieses Ersatzspiegels ist eindeutig, da das Einfallslot durch den Mittelpunkt des Spiegelkreises und den Auftreffpunkt auf den Spiegelkreis bestimmt ist. Nach den Gesetzen für den ebenen Spiegel muss

die Gegenstandsweite gleich der Bildweite sein, d. h. $b = g$, also:

$$b = R \cos \alpha + y. \quad (5.5)$$

Aufgrund des Reflexionsgesetzes (4.17) (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel), findet man $\gamma = 180^\circ - \alpha$, woraus

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \quad (5.6)$$

sowie

$$\sin \gamma = \sin \alpha \quad (5.7)$$

folgt. Weiterhin gilt

$$\sin \alpha = \frac{R - x}{R} \quad (5.8)$$

und damit wegen $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\cos \alpha = \frac{1}{R} \sqrt{2Rx - x^2}. \quad (5.9)$$

Setzt man die Gleichungen (5.5) und (5.6) in (5.4) ein, so erhält man zunächst:

$$l = \sqrt{R^2(1 + 3 \cos^2 \alpha) + 4Ry \cos \alpha + y^2}. \quad (5.10)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (5.9) in (5.10) zeigt sich, dass der Abstand l des Punktes P' vom Kreismittelpunkt M nur noch von den Ausgangskordinaten x und y abhängt, nämlich

$$l = l(x, y) = \sqrt{R^2 + 3(2Rx - x^2) + 4y\sqrt{Rx - x^2} + y^2}. \quad (5.11)$$

Aus Abb. 19 ergibt sich der gesuchte Winkel φ zu $\varphi = \alpha + \beta$. Mit Gleichung (5.7) und dem Sinussatz folgt:

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{l}. \quad (5.12)$$

Damit gilt nach (5.8)

$$\sin \beta = \frac{b}{l} \left(\frac{R - x}{R} \right) = \frac{(y + R \cos \alpha)(R - x)}{Rl} \quad (5.13)$$

und mit (5.9) erhält man nun

$$\sin \beta = \frac{(y + \sqrt{2Rx - x^2})(R - x)}{Rl}. \quad (5.14)$$

Schließlich kann der gesuchte Winkel φ mit (5.8) wie folgt aus den Ausgangskoodinaten x und y berechnet werden:

$$\varphi = \alpha + \beta = \arcsin\left(\frac{R - x}{R}\right) + \arcsin\left(\frac{(y + \sqrt{2Rx - x^2})(R - x)}{Rl}\right). \quad (5.15)$$

Mittels der Gleichungen (5.11) und (5.15) kann nun jeder beliebige Bildpunkt der Bildvorlage in einen Punkt der Zylinderanamorphose transformiert werden.

Herleitung der kartesischen Koordinatentransformation

Es soll wiederum der Frage nachgegangen werden, wo ein Punkt der Anamorphose $P' = (x', y')$ liegen muss, um im Spiegel an der Stelle $P = (x, y)$ zu erscheinen (siehe Abb. 20). Im Gegensatz zur Herleitung der Polarkoordinatentransformation wird hier am Beispiel einer kartesischen Koordinatentransformation ein Betrachter in endlicher Entfernung d vor dem Zylinderspiegel angenommen. Ausgehend von einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem soll der Ursprung im Mittelpunkt des Zylindermantels liegen. Die x -Achse, auf der x in Richtung auf den Augpunkt A wachse, sei die optische Achse, die den Augpunkt mit dem Ursprung verbindet. Die in der Abb. 20 eingezeichneten Punkte haben folgende Koordinaten: $P = (x, y)$, $P' = (x', y')$, $A = (R + d, 0)$ und $S = (R \cos \phi, R \sin \phi)$, wobei ϕ den Winkel zwischen der Spiegelnormalen und der optischen Achse beschreibt. Wie der Skizze zu entnehmen ist, gibt es offensichtlich ein $\lambda \in (0, 1)$, sodass $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PS}$ gilt, also folgt:

$$R \cos \phi = \lambda(R + d) + (1 - \lambda)x, \quad (5.16)$$

$$R \sin \phi = (1 - \lambda)y. \quad (5.17)$$

Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen führt wegen $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ zu folgendem Ausdruck, der nicht mehr von ϕ abhängt (dabei ist $r^2 = x^2 + y^2$):

$$R^2 = \lambda^2 ((R + d)^2 + r^2 - 2x(R + d)) + 2\lambda (x(R + d) - r^2) + r^2. \quad (5.18)$$

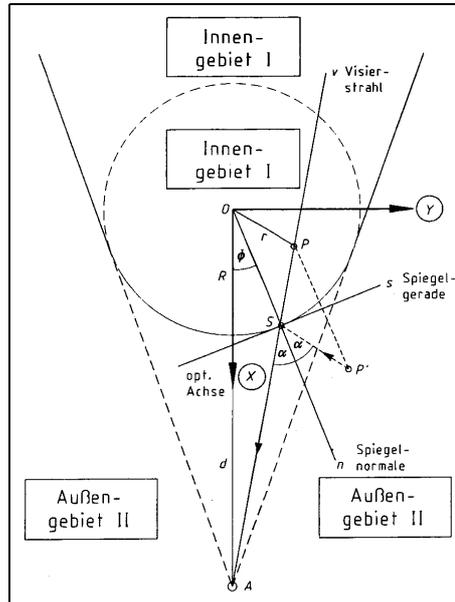


Abbildung 20: Skizze zur Zylindertransformation in kartesischen Koordinaten.

Quelle: [Bürger 1992a]

Man erhält somit eine quadratische Gleichung für λ :

$$\lambda^2 + 2k\lambda = m,$$

wobei

$$k = \frac{x(R+d) - r^2}{(R+d)^2 + r^2 - 2x(R+d)} \quad (5.19)$$

und

$$m = \frac{R^2 - r^2}{(R+d)^2 + r^2 - 2x(R+d)}. \quad (5.20)$$

Da $x = r \cos \angle(POA)$, gilt für die Nenner von k und m aufgrund des Kosinussatzes, dass sie das Quadrat des Abstandes von A zu P beschreiben und daher stets positiv sind. Die obige quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + m}.$$

Die Lösung mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel ist hier bedeutungslos, da λ nach Voraussetzung zwischen 0 und 1 liegen muss. Für den vorderen Schnittpunkt des Visierstrahls mit dem Zylindermantel gilt also:

$$\lambda = -k + \sqrt{k^2 + m}.$$

Dividiert man die Ausgangsgleichung (5.17) durch die Gleichung (5.16), so lässt sich der Winkel ϕ aus

$$\tan \phi = \frac{(1 - \lambda)y}{\lambda(R + d) + (1 - \lambda)x} \quad (5.21)$$

als Hauptwert des arctan berechnen.

Um die kartesischen Koordinaten $P' = (x', y')$ des Anamorphosenpunktes zu bestimmen, werden nun drei Abbildungen nacheinander auf den Punkt P bzw. das ihn repräsentierende Zahlentupel (x, y) angewendet. Die erste Abbildung f dreht das Koordinatensystem um den Winkel ϕ , d.h. f ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Diese Drehung um den Winkel ϕ bewirkt, dass die Spiegelnormale n zur neuen x -Achse wird und die durch den Zylindermittelpunkt gehende Parallele der Spiegelgeraden s die neue y -Achse darstellt.

Die zweite Abbildung g sorgt nun für die Spiegelung in den neuen Koordinaten. Während der y -Wert unverändert bleibt, wird die x -Koordinate in den Wert $2R - x$ gespiegelt:

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2R - x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die dritte Abbildung f^{-1} stellt die Umkehrabbildung von f dar und bewirkt somit das Zurückdrehen des Koordinatensystems. Wendet man nun $f^{-1} \circ g \circ f$ auf

einen Punkt $P(x, y)$ an, so ergeben sich schließlich unter Berücksichtigung der Additionstheoreme für den doppelten Winkel und unter Ausnutzung der Beziehung $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ die Koordinaten des zugehörigen Anamorphosenpunktes $P'(x', y')$ zu

$$x' = 2R \cos \phi - x \cos 2\phi - y \sin 2\phi, \quad (5.22)$$

$$y' = 2R \sin \phi - x \sin 2\phi + y \cos 2\phi. \quad (5.23)$$

Ein beliebiger Punkt $P = (x, y)$ lässt sich damit also nach Angabe des Augpunktes A , wobei dessen Abstand vom Zylindermittelpunkt durch den Zylinderradius R und den Abstand d vom Zylindermantel zum Augpunkt gegeben ist, über den Winkel ϕ in den Anamorphosenpunkt $P' = (x', y')$ umrechnen. Der Winkel ϕ wird dabei, wie oben beschrieben, mithilfe der Größen λ bzw. k , m und r bestimmt.

5.2.2 Kegelanamorphosen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die Zylinderanamorphose betrachtet wurde, behandelt der folgende Abschnitt die Berechnungen für einen Spiegelkegel. Der Betrachtungspunkt eines Spiegelkegels liegt im Allgemeinen auf der Vertikalen durch die Kegelspitze. Charakteristische Eigenschaften des Kegels sind der Öffnungswinkel und der Basisradius. Aufgrund der Rotationssymmetrie eines Kegels werden konzentrische Ringe mit dem Radius R bei der Spiegelung an der Kegeloberfläche auf ebenfalls konzentrische Ringe mit dem Radius r' abgebildet, wenn man den Kegel wie zuvor beschrieben betrachtet.

Kegelanamorphose mit parallelem Licht

In Abb. 21 trifft ein vertikaler Lichtstrahl im Abstand R von der vertikalen Kegelachse auf den Kegel. Der Lichtstrahl wird nach dem Reflexionsgesetz (4.17) reflektiert und trifft im Abstand r' vom Mittelpunkt des Basiskreises auf die Grundebene. Der Polarwinkel, der die Richtung des Auftreffpunktes auf den Kegel bzgl. der ver-

tikalen Kegelachse beschreibt, bleibt bei der Reflexion unverändert. Nach der Skizze gilt offensichtlich

$$r' = R + y \tan \Theta, \quad (5.24)$$

wobei y die Höhe des Auftreffpunktes bezeichnen soll. Außerdem gilt

$$y = \frac{R_0 - R}{\tan \frac{\Theta}{2}}.$$

Setzt man nun diese Beziehung für y in Gleichung (5.24) ein, so erhält man zunächst

$$r' = R + \frac{R_0 - R}{\tan \frac{\Theta}{2}} \tan \Theta.$$

Unter Anwendung des Additionstheorems für $\tan 2\Theta$ ergibt sich der Abstand des Kegelanamorphosenpunktes zur Kegelachse schließlich zu

$$r' = R + \frac{2(R_0 - R)}{1 - \tan^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (5.25)$$

Natürlich entspricht die Annahme parallelen Lichts, das heißt die Betrachtung aus dem Unendlichen, nicht der Realität. Dennoch liefert die oben hergeleitete Formel für den Einsatz im Schulunterricht hinreichend genaue Ergebnisse.

Kegelanamorphose mit fokussiertem Licht

Wegen der Rotationssymmetrie des Kegels ist aber auch eine allgemeinere Berechnung des Abstands r' möglich (vgl. [Hunt 2000]), die den Rahmen des Physikunterrichts noch nicht sprengt.

Setzt man den Radius der Kegelbasis gleich 1, ergibt sich für einen Betrachter in der Höhe d über der Kegelspitze aus Abb. 21, rechts:

$$r' = \overline{AR} + (h - a) \tan \left(\frac{\Theta}{2} + \beta \right). \quad (5.26)$$

Aus den Strahlensätzen folgt $\overline{AR} = \frac{a}{h}$, und für den Winkel $\frac{\Theta}{2} + \beta$ gilt:

$$\frac{\Theta}{2} + \beta = \alpha + 2\beta = \Theta - \alpha$$

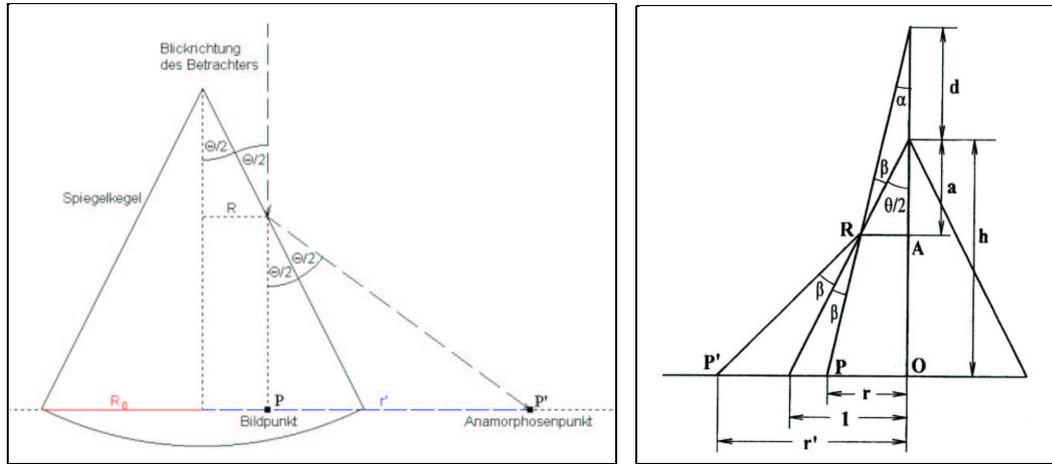


Abbildung 21: Mithilfe geometrischer Überlegungen können für den Abstand r' eines Anamorphosenpunktes vom Mittelpunkt des Basiskreises in Abhängigkeit von der Betrachtungsweise verschiedene Formeln hergeleitet werden. Quelle der rechten Skizze: [Hunt 2000]

Damit wird Gleichung (5.26) zu

$$r' = \frac{a}{h} + (h - a) \tan(\Theta - \alpha). \quad (5.27)$$

Weiter kann man der Skizze

$$\frac{r}{d+h} = \tan \alpha = \frac{\overline{AR}}{d+a} = \frac{a/h}{d+a} \quad (5.28)$$

sowie

$$\frac{1}{h} = \tan \frac{\Theta}{2} \quad (5.29)$$

entnehmen. Gleichung (5.29) führt wiederum unter Ausnutzung des Additionstheorems für $\tan 2\Theta$ zu $\tan \Theta = \frac{2}{h - \frac{1}{h}}$. Mit der Formel

$$\tan(\Theta - \alpha) = \frac{\tan \Theta - \tan \alpha}{1 + \tan \Theta \tan \alpha}$$

ergibt sich der Abstand r' des Kegelanamorphosenpunktes zur Kegelachse nach einigen Umformungen zu:

$$r' = \frac{dr}{d+h(1-r)} + \frac{(d+h)(1-r)h}{d+h(1-r)} \left[\frac{2h(d+h) - r(h^2-1)}{(d+h)(h^2-1) + 2rh} \right]. \quad (5.30)$$

Setzen wir in Gleichung (5.25) für den Kegelbasisradius R_0 den Einheitsradius 1 ein, so stellt sich diese Gleichung als Grenzwert von Gleichung (5.30) dar, wenn wir den Abstand d des Beobachters gegen ∞ laufen lassen (insbesondere gilt dann $R = r$).

5.3 Fotografisches Verfahren zur Herstellung einer Kegelanamorphose

Jearl WALKER stellt in [Walker 1981] ein fotografisches Verfahren zur Herstellung von Anamorphosen vor, das auf Experimenten von David G. STORK fußt. Dabei werden anamorphotische Aufnahmen wie gewöhnliche Fotoabzüge entwickelt, nachdem man Licht durch ein Schwarzweiß- oder Farbnegativ in geeigneter Weise auf das Fotopapier hat fallen lassen. Am Beispiel eines spiegelnden Kegels wird im Folgenden beschrieben, wie mit diesem Verfahren Anamorphosen von mir erzeugt wurden.

5.3.1 Theoretische Beschreibung

Zunächst wird ein Negativ mit dem zu verzerrenden Bild in ein Vergrößerungsgerät eingelegt (siehe Abb. 22). In den Lichtweg vom Vergrößerungsgerät mit dem Negativ zum Fotopapier werden zusätzlich eine Lochblende sowie ein Spiegelkegel gebracht. Die Lochblende muss deshalb in den Strahlengang gebracht werden, damit ausschließlich Lichtstrahlen, die am Kegel reflektiert werden, auf das Fotopapier treffen. Um zu gewährleisten, dass sich das originale und das verzerrte Bild nicht überlagern, muss die Öffnung der Lochblende kleiner als die Grundfläche des Kegels sein.

Da der Kegel auf dem Fotopapier steht, wird ein Kreis, der der Grundfläche des Kegels entspricht, nicht belichtet und erscheint auf dem Abzug dann weiß. Während die äußeren Bereiche des Negativs auf dem Fotopapier relativ nah an der Kegelbasis

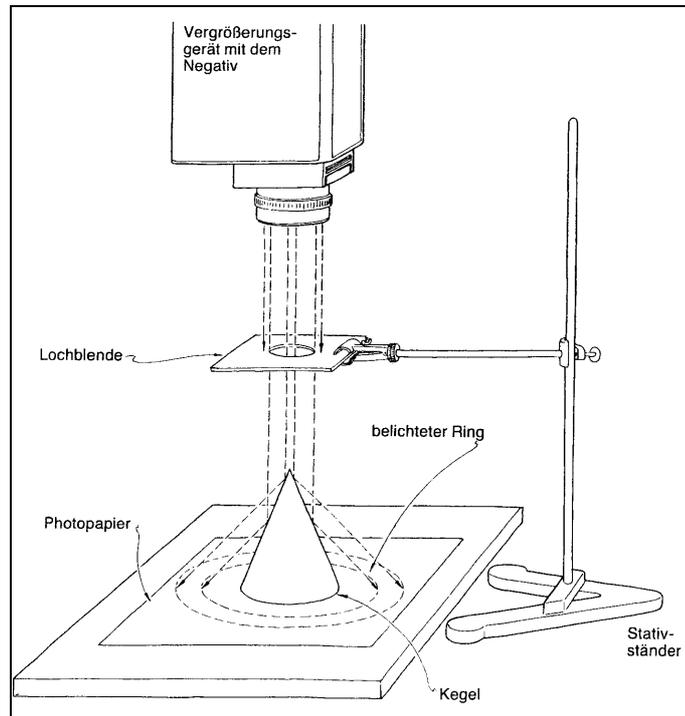


Abbildung 22: Versuchsaufbau zur Herstellung anamorphotischer Bilder.

Quelle: [Walker 1981], S. 135

liegen werden, werden Strahlen von der Mitte des Negativs weiter nach außen gespiegelt. Je näher ein „Punkt“ des Originalbildes an der Bildmitte liegt, desto stärker wird er zu einem Kreisbogen auseinandergezogen.

Die Intensität des Lichts, das auf das Fotopapier trifft, fällt wegen der Geometrie der Reflexion am Kegel nach außen hin ab, da diese Lichtstrahlen einen längeren Weg zurückzulegen haben. Der Intensitätsverlust ist proportional zur vorhandenen Intensität und zur Laufstrecke der Lichtstrahlen. Eine stetige Verkleinerung der Lochblendenöffnung während der Belichtungszeit führt dazu, dass die äußeren Bereiche aufgrund der Reflexion am Kegel länger belichtet werden, sodass insgesamt eine gleichmäßige Belichtung erreicht wird.

Negative, die in der Mitte dunkel sind, sind für die Produktion qualitativ ansprechender, anamorphotischer Bilder besser geeignet als jene, die in der Mitte heller sind. Der Grund hierfür liegt darin, dass auch ein mit Präzisionswerkzeugen hergestellter Kegel in der Spitze nicht exakt in einem Punkt zusammenläuft. Daher wird von der Mitte des Negativs kommendes Licht, das in der Nähe der Spitze auf den Kegel trifft, unregelmäßig gestreut. Eine anschließende, völlige Entzerrung kann somit nur mit demselben Kegel in derselben Position wie bei der Belichtung gelingen. Da es praktisch unmöglich ist, den Kegel genauso wie beim Belichten auf das Fotopapier zu stellen, lässt sich die unregelmäßige Reflexion an der Kegelspitze nicht mehr rückgängig machen.

5.3.2 Praktische Durchführung

Versuchsaufbau

Um eine Kegelanamorphose herzustellen, baut man eine Anordnung wie in Abb. 22 auf. Neben einem Vergrößerungsgerät werden eine Lochblende, die idealerweise verstellbar sein sollte, Fotopapier (schwarzweiß), Stativmaterial und natürlich ein spiegelnder Kegel benötigt. Hier wurde ein Kegel mit einem Basisdurchmesser von 59 mm und einem Öffnungswinkel von 60° benutzt (siehe Anhang B). Es ist auch möglich, Farbfotos zu entwickeln, jedoch ist der Aufwand zu groß, als dass er gerechtfertigt wäre. Die Verzerrungen, auf die es in diesem Versuch ankommt, sind auf Schwarzweiß-Abzügen ebenso gut zu erkennen. Schließlich werden zur Entwicklung des Fotopapiers verschiedene Bäder benötigt, in die das Fotopapier getaucht werden muss: Dabei handelt es sich um den Entwickler, das Stopp- und das Fixierbad.

Versuchsdurchführung

Zunächst sollte ein Schwarzweiß-Negativ ausgewählt werden, das in der Mitte dunkel ist. So wird gewährleistet, dass keine Lichtstrahlen vom Vergrößerungsgerät auf

die Kegelspitze fallen. Es sollte vermieden werden, dass Lichtstrahlen auf die Spitze oder in die Nähe der Spitze fallen, da es hier – wie oben beschrieben – produktionsbedingt stets zu unregelmäßigen Reflexionen kommt. Nun ist das Negativ oder ein Teil des Negativs mithilfe des Vergrößerungsgerätes und der Lochblende auf eine in der Ebene, auf die auch der Spiegelkegel gestellt wird, liegende Kreisfläche, deren Durchmesser dem des Kegels entsprechen muss, scharf abzubilden. Wird der Durchmesser kleiner gewählt, so wird ein Ring um den Kegel nicht belichtet und wir erhalten auf dem Abzug einen weißen Kreis, dessen Durchmesser größer als der des Spiegelkegels ist. Dann wird das Fotopapier ausgelegt, ohne die Lochblende versehentlich zu verstellen. Es ist natürlich darauf zu achten, dass außer beim Belichten im Folgenden nur noch niederenergetisches rotes Licht verwendet werden darf.

Im nächsten Schritt stellt man den spiegelnden Kegel auf den mit Rotlicht schwach ausgeleuchteten Kreis. Hier bietet es sich an, die Öffnung der Lochblende im Strahlengang kurzzeitig zu vergrößern, um den Kegel in einem größeren Kreis zentrieren zu können. Bezüglich der Fokussierung muss man sich nun entscheiden, welcher Teil des Bildes scharf abgebildet werden soll. Mit der Blendenöffnung am Vergrößerungsgerät lässt sich die Tiefenschärfe einstellen. Eine große Tiefenschärfe wird durch eine kleine Blendenöffnung erreicht, die wiederum mit einer längeren Belichtungszeit verknüpft ist. Nun folgt die Belichtung des Fotopapiers. Die Belichtungszeit hängt sowohl vom verwendeten Fotopapier als auch von der Intensität des einfallenden Lichtes ab. Dabei ist zu beachten, dass aufgrund der Geometrie des Kegels und der Reflexion an demselben die Intensität des Lichts, das auf das Fotopapier fällt, nach außen hin geringer wird. Indem man die Lochblende mit der Zeit verkleinert, wird eine längere Belichtung der äußeren Bereiche erreicht, die zur Kompensation des Intensitätsverlusts führt. Zur Ermittlung einer akzeptablen Belichtungszeit sollten auf Teststreifen verschiedene Belichtungszeiten ausprobiert werden, bevor ein großes Fotopapier benutzt wird. Schließlich wird das Fotopapier, nachdem es in die verschiedenen Flüssig-

keiten getaucht wurde, mit Wasser abgespült und getrocknet.

Versuchsergebnisse

Aufgrund der Umkehrbarkeit des Lichtweges kann man die Verzerrung wieder rückgängig machen, indem man den gleichen Anamorphoskop, der zur Herstellung des anamorphotischen Fotos benutzt wurde, auf den weißen Kreis des Fotos stellt und den Kegel von oben betrachtet. Die Abb. 23 und Abb. 24 zeigen anamorphotische Fotoabzüge einer Hand, einmal mit und einmal ohne Spiegelkegel. Auf dem Foto mit Kegel ist wieder die ursprüngliche Hand zu erkennen. Das Originalfoto ist im Anhang C als Abb. 69 auf Seite 141 zu finden.

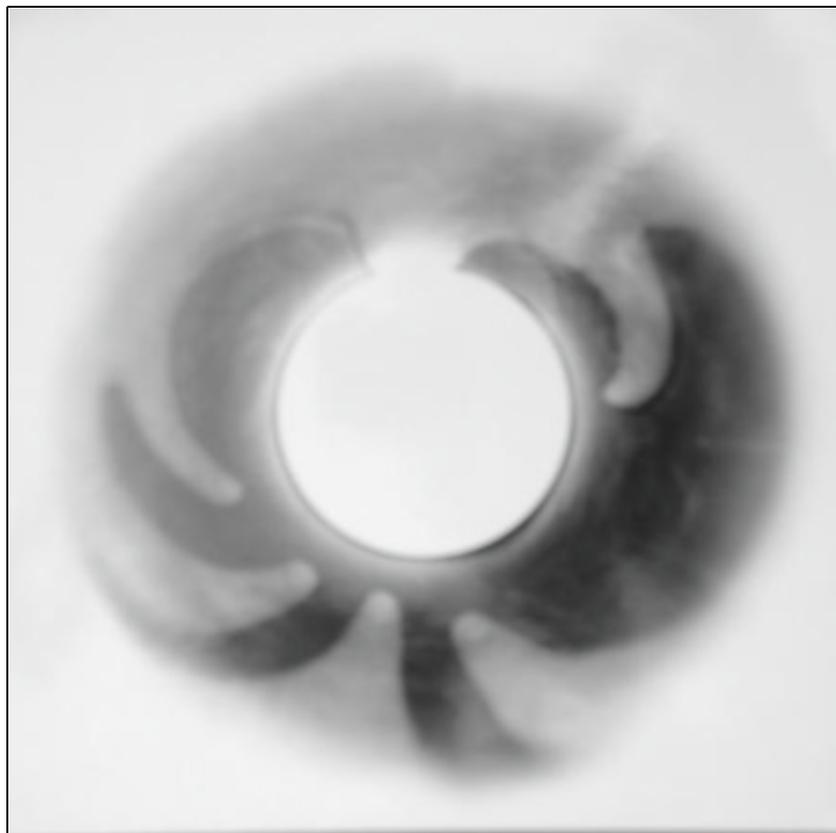


Abbildung 23: Fotoabzug einer Kegelanamorphose ohne Spiegelkegel in der Mitte



Abbildung 24: Fotoabzug einer Kegelanamorphose mit Spiegelkegel in der Mitte.

Es fällt auf, dass das entzerrte Bild in der Nähe der Kegelspitze sehr hell ist. Dies ist zum einen dadurch zu erklären, dass die idealisierte Spitze eines Kegels in der Praxis nicht existiert und es daher zu den oben beschriebenen Streuungen kommt. Zum anderen ist die Helligkeit in der Mitte des Bildes auf eine zu geringe Belichtungszeit zurückzuführen. Obwohl die Öffnung der Lochblende mit der Zeit stetig kleiner eingestellt wurde, konnte der Intensitätsverlust des Lichts am äußeren Rand der Anamorphose offensichtlich nicht kompensiert werden. Durch weitere Erhöhung der Belichtungszeiten könnte dieser Fehler weiter minimiert werden; jedoch wird das entzerrte Bild aufgrund der Streuung an der Kegelspitze in der Mitte stets heller als

die Bildvorlage bleiben. Daher sind Bildvorlagen, die in der Mitte bereits hell sind, besonders geeignet für die fotografische Herstellung einer Kegelanamorphose.

Auf dem anamorphotischen Abzug einer Katze, die dem Betrachter ihren weißen Bauch zuwendet, ist der Fehler daher nicht so leicht wahrzunehmen, wie das Bild in Abb. 70 auf Seite 142 im Anhang C, bestätigt. Weitere Beispiele selbst erstellter anamorphotischer Fotos sind ebenfalls im Anhang C zu finden.

Versuchsauswertung

Dieser Versuch zeichnet sich dadurch aus, dass er prinzipiell auch in der Schule durchgeführt werden kann. Um ansprechende Ergebnisse zu erzielen, muss jedoch relativ viel Zeit in dieses Projekt investiert werden. Die genaue Positionierung des Kegels auf die mit Rotlicht nur schwach ausgeleuchtete Kreisfläche bereitet neben der Ermittlung der für jede Anordnung unterschiedlichen Belichtungszeit die Hauptschwierigkeit. Die Fokussierung der Zerrbilder stellt eine weitere Schwierigkeit dar, da man sich für einen Bereich, der scharf abgebildet werden soll, entscheiden muss. Will man eine große Tiefenschärfe erreichen, so muss das Fotopapier aufgrund der geringen Blendenöffnung relativ lange belichtet werden.

Mit etwas Übung sollte es jedoch möglich sein, anamorphotische Abzüge zu erstellen, die bei Betrachtung mithilfe des entsprechenden Anamorphoskops wieder entzerrt erscheinen. Ein positiver Nebeneffekt dieses Versuchs besteht darin, dass die Schüler neben ihren Überlegungen zum Strahlengang am Kegelspiegel auch lernen, wie Fotos entwickelt werden.

5.4 Mechanische Geräte zur Erstellung von Anamorphosen

Eine weitere Möglichkeit zur Herstellung von anamorphotischen Bildern stellt der *Anamorphosenzeichner* dar. Wie der Name suggeriert, handelt es sich hierbei um ein mechanisches Gerät, mit dem man Anamorphosen zeichnen kann. Es werden im Folgenden zwei Geräte zur Herstellung von Kegel- und Zylinderanamorphosen vorgestellt.

5.4.1 Kegelanamorphosenzeichner

Ein Zeichengerät für Kegelanamorphosen von Michel PARRÉ greift auf das klassische Modell eines Pantographen nach Christoph SCHEINER zurück. Als Pantograph wird ein Gerät zum Herstellen vergrößerter und verkleinerter Kopien eines Bildes bezeichnet. Der Pantograph nach PARRÉ besteht aus zwei verschiedenen großen Parallelogrammen, die über bewegliche Gelenke gekoppelt sind, während das Original des sogenannten *Storchenschnabels* nach SCHEINER auf einem Parallelogramm basiert, das von vier Holzstäben aufgespannt wird, die ebenfalls mit beweglichen Gelenken zusammengefügt sind.

Der Storchenschnabel verfügt über einen Führungsstift, mit dem man die Punkte einer Zeichnung abfährt, sowie über einen Zeichenstift, der die Vorlage dem Abstandsverhältnis der beiden Stifte entsprechend um einen gewissen Faktor vergrößert oder verkleinert aufzeichnet. Ob die Zeichnung dabei vergrößert oder verkleinert wird, hängt davon ab, wo der Führungs- bzw. Zeichenstift eingehängt ist. Eine Vertauschung der beiden Stifte mit konstanten Abstandsverhältnissen bewirkt dabei jeweils eine Vergrößerung um den Faktor des Kehrwerts der ursprünglichen Vergrößerung (siehe [Scheiner 1631]).

Eine Einsatzmöglichkeit bzw. eine kleine Erweiterung des Gerätes gibt PARRÉ im Jahr 1973 mit seinem Apparat (siehe Abb. 25). Sein Zeichengerät wird im Zentrum der Kegelgrundfläche fixiert, sodass es sich rund um die Kegelachse bewegen lässt. Der Führungs- sowie der Zeichenstift befinden sich an zwei äußeren Stellen des Pantographen.

Alle Bewegungen des einen Stiftes werden über Gelenke und Verbindungsstäbe an den anderen Stift gestreckt oder gestaucht weitergegeben. Auf diese Weise ist es bequem möglich, per Hand Kegelanamorphosen herzustellen.

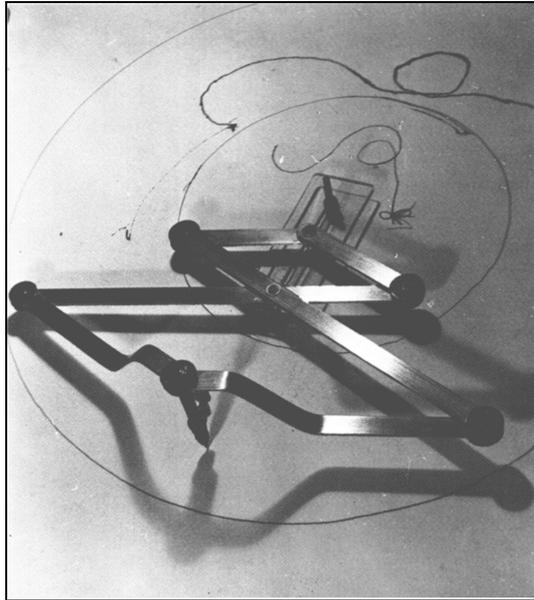


Abbildung 25: Kegelanamorphosenzeichner nach Michel PARRÉ.

Quelle: [Baltrusaitis 1984], S. 208

5.4.2 Zylinderanamorphosenzeichner

Ein Zeichengerät, das die Zeichnung einer anamorphotischen Abbildung am Zylinderspiegel mechanisch ausführt, stammt laut eigener Aussage von Prof. Dr. Wolfgang BÜRGER ([Bürger 1992a]). Wie beim Kegelanamorphosenzeichner lassen sich auch hier Führungs- und Zeichenstift vertauschen, wodurch auf praktische Weise dargelegt wird, dass die Abbildung ebenso wie der Lichtweg umkehrbar ist. Es ist also auch möglich, bereits vorhandene Anamorphosen zu dechiffrieren, wenn der Zylinderradius bekannt ist. Wie bereits im Kapitel 5.2.1 im Abschnitt über die Schrägbetrachtung angekündigt wurde, genügt es hier, zweidimensionale geometrische Optik zu betreiben, wenn man entsprechend eine – vom Augpunkt A_0 aus gesehen – unverzerrte Bildvorlage benutzt.

Wir betrachten im Folgenden die senkrechten Projektionen des Augpunktes und

des Spiegelpunktes am Zylinder in die Grundebene (siehe Abb. 26).

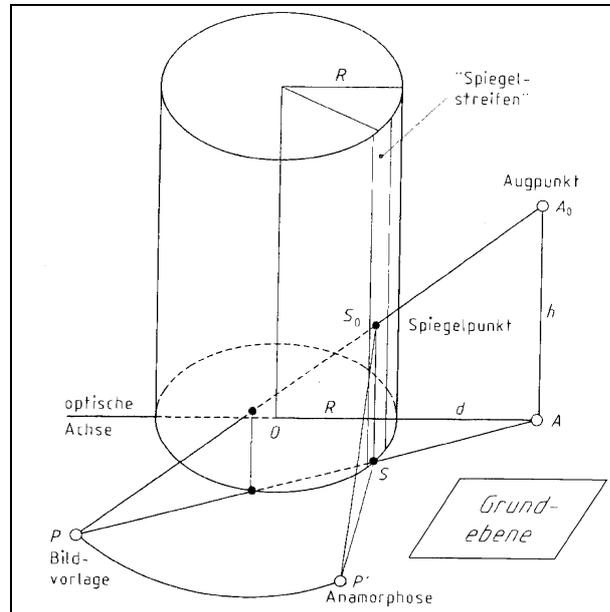


Abbildung 26: Projektion des Aug- und Spiegelpunktes in die Grundebene.

Quelle: [Bürger 1992a], S. 469

Die Spiegelung am Zylinderspiegel kann in zwei voneinander unabhängige Reflexionen der Lichtstrahlen zerlegt werden. Dabei handelt es sich um die Reflexion in horizontaler und senkrechter Richtung, die der Reflexion am ebenen Spiegel entspricht. Die Spiegelung in senkrechter Richtung kann der Anamorphosenzeichner nach BÜRGER nicht nachbilden. Ausgehend von einer Bildvorlage in der Ebene hängt die Anamorphose nicht von der Höhe h ab, da die Spiegelnormale eines Zylinders nicht von der Höhe abhängt. Die Spiegelung am Grundkreis des Zylinders wird vom Anamorphosenzeichner geleistet. Dazu wird der Anamorphosenzeichner im Mittelpunkt des auf die Grundebene projizierten Spiegelkreises sowie in der senkrechten Projektion des Augpunktes fixiert.

aufweisen.

Das mit dem Führungsstift abgefahrenene Bild, welches vom Augpunkt aus gesehen unverzerrt hinter der Zylinderoberfläche liegt, besteht aus vielen Punkten. Jeder Punkt P des Bildes wird auf diese Weise mithilfe des Zeichenstiftes auf P' abgebildet. In dem Punkt, in dem sich die Spiegelschiene, die Radialschiene und die Visierschiene kreuzen, befindet sich der Spiegelpunkt S . Das vom Führungsstift abgefahrenene Bild ist aus physikalischer Sicht virtuell, da ein Lichtstrahl an der Mantelfläche des Zylinders im Spiegelpunkt S reflektiert wird und kein Lichtstrahl durch die Zylinderoberfläche hinter den Zylinder gelangen kann. Ein Punkt P der virtuellen Bildvorlage wird somit aus dem *Innengebiet I* auf einen Punkt P' des *Außengebiets II* abgebildet. Dabei bezeichnet BÜRGER das Gebiet, das vom Augpunkt aus gesehen durch den Spiegelzylinder verdeckt wird, als Innengebiet I. Es handelt sich dabei also um den Teil der Ebene, der hinter dem sichtbaren Stück des Spiegelkreises liegt und seitlich von den beiden äußeren Visierstrahlen begrenzt wird. Der übrige Teil der Ebene heißt bei BÜRGER Außengebiet II.

Bau des Zylinderanamorphosenzeichners mit

LEGO®-Technik-Elementen

Die Herstellung einer Zylinderanamorphose per Hand ist mittels Zirkel und Lineal leicht möglich, jedoch stößt man bereits bei sehr wenigen Punkten an die Grenze des Durchführbaren, da eine punktweise Konstruktion zu viel Zeit in Anspruch nimmt. Hierin liegt der Vorteil eines Anamorphosenzeichners, der mechanisch das ausführen kann, was sonst langwierig per Hand konstruiert bzw. berechnet werden müsste. Mithilfe von LEGO®-Technik-Bauelementen ist es möglich, einen solchen Anamorphosenzeichner nachzubauen, der zumindest in der Lage ist, einfache Strichzeichnungen zu anamorphotisieren.

Konstruktion des LEGO®-Zeichners und ihre Probleme

Ausgehend von der Skizze in Abb. 27 bereitete die Konstruktion des Anamorphosenzeichners zunächst einige Schwierigkeiten, da das Gerät in der Skizze nur zweidimensional gezeichnet ist. Erste Versuche scheiterten daran, dass die Visierschiene, die in der Projektion des Augpunkts fixiert ist und in Richtung des Bildpunktes P verläuft, und die Gleitgelenke B und C des Parallelogramms über dieselbe Spiegelschiene s glitten. Somit war der Bereich, den der Führungsstift abfahren konnte, dadurch begrenzt, dass die Gelenke B und C des Parallelogramms jeweils nur bis zum Spiegelpunkt S gleiten konnten, durch den neben der Visierschiene auch die Radialschiene verläuft, die im Mittelpunkt O des Spiegelzylinders bzw. der Projektion des Spiegelkreises fixiert wird. Die Lösung dieses Problems liegt in der Zuhilfenahme der dritten Dimension. In einer bestimmten Höhe wird eine parallel zur Spiegelschiene s verlaufende Hilfsschiene konstruiert, auf die das Gelenkparallelogramm aufgesetzt wird.

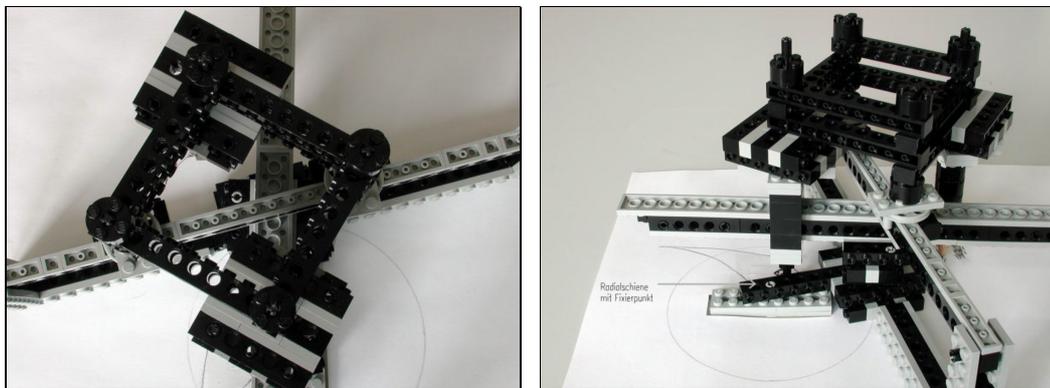


Abbildung 28: Verschiedene Ansichten des LEGO®-Zeichners: Links ist in der Draufsicht das Gelenkparallelogramm mit den großen Auflageflächen für die Stifte zu sehen, während rechts der hintere Teil des Zeichners mit der fixierten Radialschiene schräg von der Seite dargestellt ist.

Bei einem Nachbau des LEGO®-Zeichners sollten zunächst die Radialschiene und die Spiegelschiene (hier ca. 25,5 cm) konstruiert werden, die senkrecht miteinander verbunden werden müssen. Anschließend erfolgt der Bau des oben beschriebenen Kreuzungspunktes S auf der Spiegelschiene. Dieser Drehpunkt ist so mit einer Führung zu versehen, dass die Visierschiene über den Drehpunkt gleiten kann. Die Höhe, die sich ergibt, wenn die Visierschiene (hier ca. 38,0 cm) über ihre Führung im Kreuzungspunkt S gleitet, bestimmt die Höhe (hier ca. 7,0 cm) der Hilfsschiene, die genauso lang ist wie die Spiegelschiene. Die Visierschiene wird über der Projektion des Augpunkts so fixiert, dass sie beim Gleiten über ihre Führung im Spiegelpunkt S parallel zur Grundebene verläuft.

Schließlich erfolgt der Bau des Gelenkparallelogramms, das einen Punkt der Bildvorlage an der Spiegelschiene spiegelt. Dazu muss ein Rhombus mit beweglichen Gelenken konstruiert werden (siehe Abb. 28 und Abb. 29). Aufgrund der Eigenschaft, dass alle Seiten eines Rhombus gleich lang sind (hier ca. 6,5 cm), ergibt sich im Punkt P' tatsächlich der Spiegelpunkt von P , wenn die Gelenke B und C über die Hilfsschiene und der Führungsstift gleichzeitig über die Visierschiene gleiten. Die

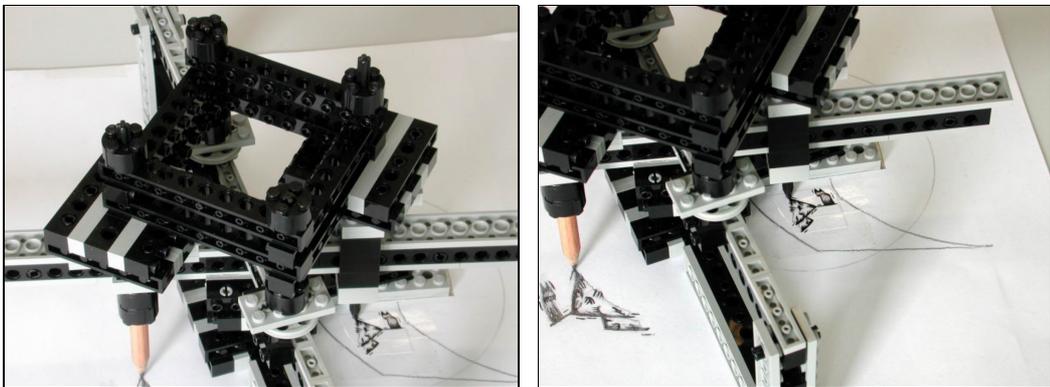


Abbildung 29: Gelenkparallelogramm mit Führungs- und Zeichenstift des LEGO®-Zylinderanamorphosenzeichners

beiden Stifte, die aus einer angespitzten LEGO®-Stange sowie einem gekürzten Bleistift bestehen, sollten an einer relativ großen Auflagefläche unterhalb der beiden Gelenke befestigt werden, damit die Ungenauigkeiten beim Abfahren der Bildvorlage und Zeichnen des Anamorphosenpunktes minimiert werden (siehe Abb. 28, links).

Bei der Konstruktion der verschiedenen Gelenke und Führungsschienen traten weitere Probleme bei der Realisierung des Anamorphosenzeichners mithilfe von LEGO®-Bausteinen auf, da Folgendes zu beachten war: Die Gleitgelenke B und C bzw. der Führungsstift, der im Punkt P aufgehängt wird, müssen exakt entlang der Hilfsschiene bzw. entlang der Visierschiene verlaufen. Der Zeichenstift muss zentral unterhalb des Punktes P' fixiert werden, damit keine weiteren Verzerrungen – neben der beabsichtigten – in der Anamorphose auftreten. Bereits kleine Ungenauigkeiten in der Konstruktion, die beispielsweise dadurch gegeben sein können, dass das Gelenkparallelogramm aufgrund der Konstruktion seiner Gleitgelenke nicht exakt über die Hilfsschiene (sondern evtl. minimal seitlich verschoben) gleitet, bewirken relativ große Fehler beim Zeichnen der Anamorphosenpunkte.

Herstellung einer Zylinderanamorphose mithilfe des LEGO®-Zeichners

Obwohl die Gelenke B und C bei diesem Modell frei auf der Hilfsschiene gleiten können, deren Länge hier ebenso wie die der parallelen Spiegelschiene ca. 25,5 cm beträgt, ist der Bereich, den der Führungsstift des Anamorphosenzeichners abfahren kann, aufgrund der Konstruktion begrenzt.

In Abb. 30 ist links ein Blatt Papier zu sehen, das zur Herstellung einer Anamorphose mithilfe des LEGO®-Zeichners vorbereitet ist. Die ebenfalls in dieser Abbildung sichtbaren LEGO®-Bausteine, die mit einem Zweikomponentenkleber auf eine Metallplatte geklebt wurden, dienen zur Fixierung des Zeichners, der hier jeweils im Zentrum der LEGO®-Bausteine befestigt wurde. Damit sind der Mittelpunkt des Spiegelkreises und die Richtung des Augpunktes festgelegt. Auf dem Blatt Papier in Abb. 30 (links) sind bereits der Spiegelkreis des Spiegelzylinders sowie das

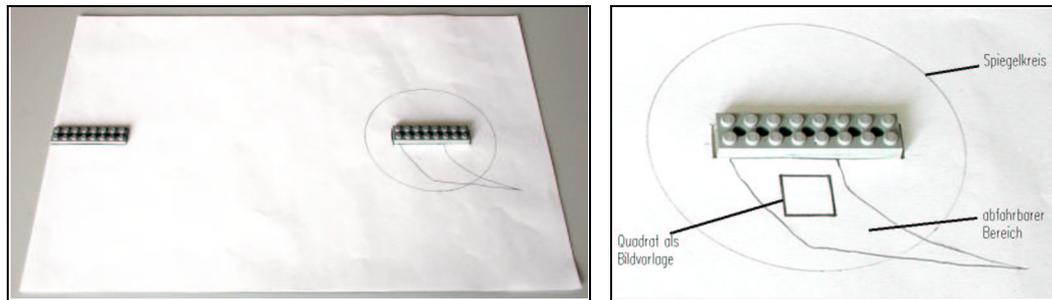


Abbildung 30: Vorbereitete Blätter zur Herstellung einer Zylinderanamorphose mithilfe des LEGO®-Nachbaus; rechts ist ein Quadrat als beispielhafte Bildvorlage für den LEGO®-Anamorphosenzeichner abgebildet.

Gebiet, das der Zeichner mit den hier eingestellten Parametern abfahren kann, eingezeichnet. In dieses Gebiet kann nun ein aus einfachen Linien bestehendes Motiv gebracht werden (siehe Abb. 30, rechts), das anschließend mit dem Führungsstift des Anamorphosenzeichners abgefahren wird.

Aufgrund der Reibung der verschiedenen Führungsschienen und Gelenke sowie der nicht zu verhindernden Varianz der gesamten Konstruktion wird eine Bewegung des Führungsstiftes nicht instantan auf den Zeichenstift übertragen. Daher sollte der Zeichenstift in seiner Bewegung mit der einen Hand unterstützend geführt werden, während der Führungsstift gleichzeitig mit der anderen Hand über die Bildvorlage geführt wird. Mit etwas Übung sind trotz der Varianz mit dem LEGO®-Zeichner nutzbare Ergebnisse zu erzielen. In Abb. 31 sind die erwarteten Verzerrungen in der vom Zeichenstift gezeichneten Anamorphose gut zu erkennen.

Diskussion der Ergebnisse

Um die Qualität der Anamorphosen beurteilen zu können, betrachtet man sie im Spiegelzylinder und vergleicht das Spiegelbild mit den Bildvorlagen. Die richtige vertikale Streckung ergibt sich durch eine geeignete Höhenwahl. Die vertikale Spiegelung wird – wie bereits beschrieben – vom Anamorphosenzeichner nicht nachgebil-

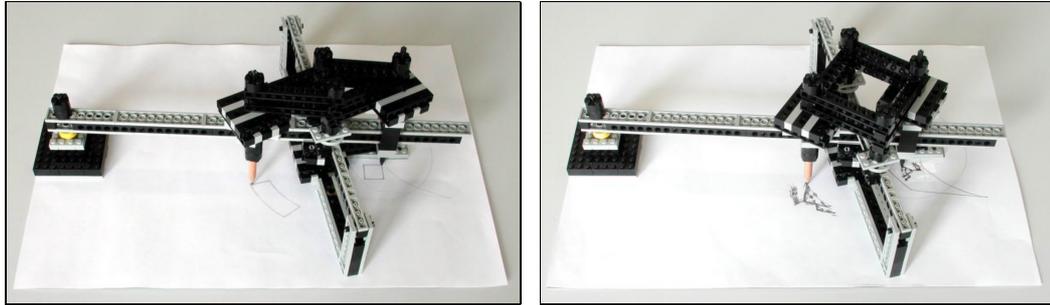


Abbildung 31: Mithilfe des LEGO®-Zeichners hergestellte Anamorphosen: Links ist eine Anamorphose des in Abb. 30 dargestellten Quadrats zu sehen, während rechts ein Zerrbild eines Cliparts *Berge* gezeichnet wurde.

det. Vielmehr werden der Augpunkt und der Spiegelpunkt am Zylindermantel auf die Grundebene projiziert und somit die Höhe beim Anamorphotisieren mit dem Anamorphosenzeichner vernachlässigt. Theoretisch muss sich das Spiegelbild der Anamorphose, das sich bei Betrachtung aus Richtung des Augpunktes (Verlängerung der Visierschiene) im Zylinderspiegel ergibt, mit der Bildvorlage zur Deckung bringen lassen können (unter Vernachlässigung der Augpunkthöhe). Der Vergleich von Spiegelbild im Zylinder und Bildvorlage bestätigt diese Theorie, obwohl die Bilder nicht exakt übereinander liegen. Dies liegt in dem bereits diskutierten Effekt der Schrägbetrachtung begründet, der hier jedoch weitgehend unberücksichtigt bleiben kann, da minimale Lageunterschiede und Verzerrungen mit einem LEGO®-Zeichner schon aufgrund der vorgegebenen Bausteingröße und der Reibung der Gelenke auf den Führungsschienen nicht vermeidbar sind. Weitere Fehlerquellen liegen im Zylinderspiegel, der exakt dem Radius des beim LEGO®-Zeichner benutzten Radius (hier 5,5 cm) entsprechen sollte. Hier wurde wiederum das mit Spiegelfolie umwickelte Abflussrohr aus Kapitel 5.1.2 verwendet. Der Abstand des Augpunktes vom Mittelpunkt des Spiegelkreises betrug jeweils ca. 29,0 cm. Die Abb. 32 und Abb. 33 zeigen im Spiegelzylinder jeweils das Spiegelbild der beiden Anamorphosen im Ver-

gleich zu den Originalen.

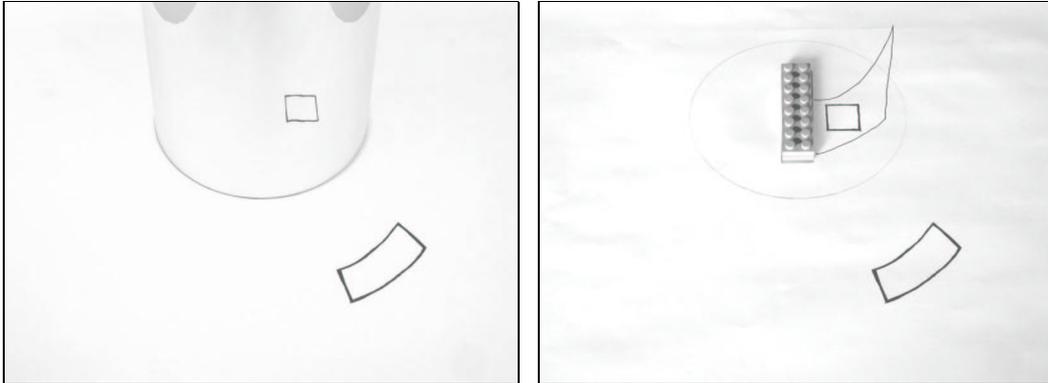


Abbildung 32: Entzerrung des anamorphotisierten Quadrats: Links ist die Entzerrung der hergestellten Anamorphose im Spiegelzylinder dargestellt; rechts ist zum Vergleich die Bildvorlage abgebildet.

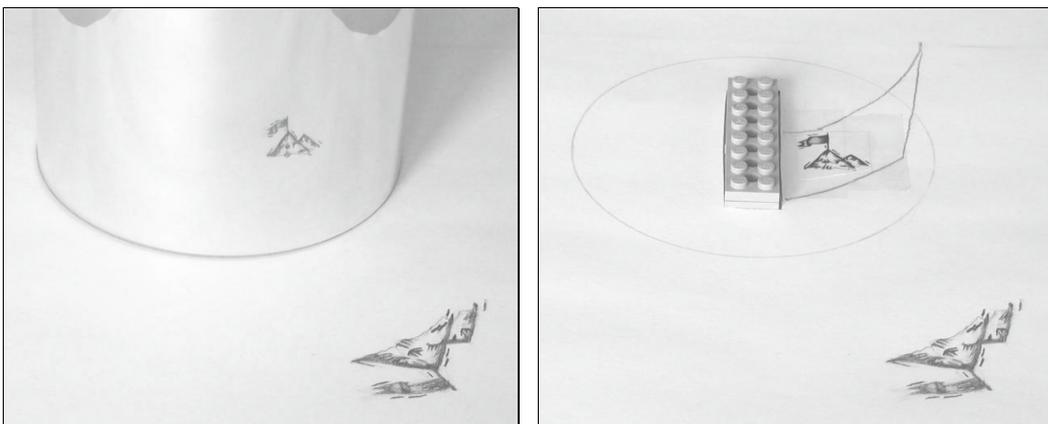


Abbildung 33: Entzerrung des anamorphotisierten Cliparts im Vergleich zum Original

Die Spiegelbilder stimmen in einem hohem Maße mit den Originalen überein und es ist offensichtlich prinzipiell möglich, mit dem LEGO®-Technik-Modell einfache Anamorphosen herzustellen. Außerdem trägt der LEGO®-Nachbau zum tieferen

Verständnis des Verfahrens bei, indem er dem Benutzer das Prinzip der anamorphotischen Abbildung am Zylinderspiegel näherbringt. Auch wenn der Zeichenstift aufgrund der oben geschilderten Tatsachen evtl. nicht exakt den zum Führungsstift gehörigen Anamorphosenpunkt darstellt, kann die Funktionsweise eines Anamorphosenzeichners mit diesem kostengünstigen Modell eindrucksvoll veranschaulicht werden. Für den Einsatz im Physikunterricht ist dieses Modell daher sehr empfehlenswert, zumal ein Anamorphosenzeichner aus Stahlschienen und feinen Gelenken, wie ihn BÜRGER beschreibt, nicht nur kostspieliger wäre, sondern auch in einer feinmechanischen Werkstatt konstruiert werden müsste.

5.5 Computerprogramme zur Erstellung von Anamorphosen

Die schnellste Möglichkeit, Anamorphosen zu erzeugen, besteht heutzutage darin, sie von einem Computer berechnen zu lassen. Mit dieser relativ modernen Methode ist es inzwischen aufgrund der ständig wachsenden Rechnerleistung möglich, in wenigen Sekunden die gewünschten Anamorphosen zu erstellen.

5.5.1 Selbst erstelltes Programm zur Berechnung von katoptrischen Anamorphosen

Die Möglichkeit der Erstellung von Anamorphosen mithilfe des Computers soll im Folgenden anhand eines im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programms vorgestellt werden (siehe beiliegende CD).

Eine Methode der Visualisierung von katoptrischen Anamorphosen stellt das Ray-Tracing-Verfahren dar (vgl. Unterkapitel 5.1.2), das auch hier in seinen Grundzügen zur Anwendung gekommen ist. Beim Ray-Tracing-Verfahren wird die Umkehrbarkeit des Lichtweges ausgenutzt, indem man die Strahlen, die vom Auge über den Anamorphoskopen auf die Papierebene gelangen, verfolgt. Für jedes Pixel der Bildvorlage, die in einer virtuellen Ebene zwischen dem Auge des Betrachters und dem

jeweiligen Spiegel liegt, wird ein Lichtstrahl, der durch den jeweiligen Pixel und den Augpunkt definiert ist, vom Auge aus auf den Spiegel geschossen. Dort werden die Lichtstrahlen nach dem Reflexionsgesetz (4.17) reflektiert und fallen auf ein Pixel der Grundebene, auf der der Spiegel steht. Dieses Pixel wird nun in der Farbe des zugehörigen Pixels aus der Bildvorlage gefärbt. Nachdem dieses Verfahren für jeden Punkt der Bildvorlage angewandt wurde, erhält man ein anamorphotisches Bild, das – abhängig von der Auflösung der Grundebene – auch Pixel enthält, denen keine Farbe zugeordnet werden konnte.

Das Programm, das die Reflexion an verschiedenen Spiegeln simuliert, wurde in der objektorientierten Programmiersprache Delphi geschrieben. Dabei wurde u. a. auf die bereits vorhandenen Units `RaytraceDelphi.pas` und `Mathe.pas`, die freundlicherweise von Herrn Prof. Dr. Udo BACKHAUS vom Institut für Didaktik der Physik an der Universität Essen zur Verfügung gestellt wurden, zurückgegriffen. Als Compiler für das Programm diente BORLAND Delphi 5.0.

Eingabemaske

Beim Aufruf des Anamorphosenrechners sind zunächst verschiedene Eingaben zu machen. Anfangs muss der Benutzer angeben, welcher Anamorphoskop benutzt werden soll. Dabei stehen ihm drei Möglichkeiten (Zylinder-, Kegel- oder Kugelspiegel) zur Auswahl. Dem ausgewählten Spiegel sind nun weitere Eigenschaften wie Radius (Zylinder- und Kugelspiegel) bzw. Basisradius (Kegelspiegel) und Höhe zuzuordnen. Die Höhe des Anamorphoskops ist nur beim Kegelspiegel anzugeben, da die Höhe des Kugelspiegels bereits durch seinen doppelten Radius gegeben ist und für die Höhe des Zylinderspiegels stets die Höhe des Augpunktes angenommen werden kann. Eine größere Höhe wäre bei Schrägbetrachtung nach unten überflüssig und eine kleinere Höhe könnte bei der Berechnung der Anamorphose Probleme verursachen. Sämtliche Eingaben sind relativ zu sehen; es handelt sich nicht um Eingaben in bestimmten Einheiten. Weitere Parameter, die der Benutzer in die entsprechenden Dialogfenster

eintragen muss, betreffen den Augpunkt, von dem aus der Benutzer in den Spiegel sehen möchte:

- Abstand des Augpunktes zum Spiegel
- Höhe des Augpunktes über der Grundfläche
- Blickwinkel (in Grad) des Auges gegenüber der Horizontalen

Des Weiteren muss die Angabe einer Bildvorlage im BMP-Format erfolgen. In Abhängigkeit von der Größe der Bildvorlage muss eventuell der Skalierungsfaktor verringert werden, der die Bildvorlage – dem Skalierungsfaktor entsprechend – ohne Verzerrung verkleinert. Dies ist immer dann erforderlich, wenn es Randstrahlen gibt, die vom Augpunkt durch die Eckpunkte der Bildvorlage verlaufen, aber nicht auf den Spiegel treffen. Neben der Änderung des Skalierungsfaktors können vom Benutzer auch die Eigenschaften des Spiegels oder des Augpunktes so verändert werden, dass eine Berechnung einer Anamorphose möglich wird.

Schließlich kann der Benutzer eine Zieldatei angeben, in der die berechnete Anamorphose gespeichert werden soll. Dabei ist die Größe der Zieldatei von der Wahl der Auflösung abhängig.

Funktionsweise des Programms

Das im Rahmen dieser Arbeit erstellte Programm berechnet aus den oben genannten Parametern eine Anamorphose, die durch Betrachtung im entsprechenden Anamorphoskop, wieder entzerrt werden kann. Der Ursprung des dreidimensionalen Raumes wird durch den Basismittelpunkt des jeweiligen Spiegels repräsentiert. Bezüglich dieses Ursprungs werden der Augpunkt sowie der Anamorphoskop definiert. Folglich beschreibt der Abstand zum Spiegel nicht etwa den Abstand des Augpunktes von der Spiegeloberfläche, sondern den Abstand der Projektion des Augpunktes auf die Grundebene zum Ursprung (siehe Abb. 34). Nach Eingabe sinnvoller Parame-

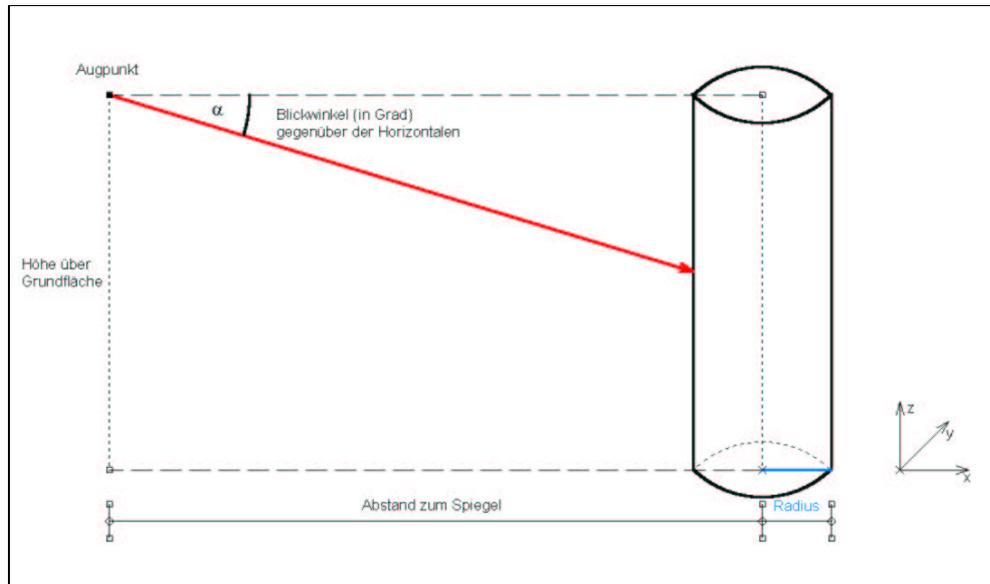


Abbildung 34: Zur Veranschaulichung der frei wählbaren Parameter am Beispiel des Zylinderspiegels.

ter kann durch Anklicken des Buttons „Berechne Anamorphose“ die Berechnung gestartet werden. Nun werden im Wesentlichen drei Programmdurchläufe gestartet. Im ersten Durchlauf wird ermittelt, in welcher maximalen Entfernung vom Ursprung ein Punkt der Anamorphose gezeichnet werden muss. Im zweiten Durchlauf wird ein dementsprechend großes, quadratisches „Blatt Papier“ Pixel für Pixel weiß gefärbt. Anschließend wird im dritten Durchlauf jedes von Reflexionsstrahlen getroffene Pixel in der jeweiligen Farbe des Originalpixels eingefärbt. Die weiteren Parameter zur Darstellung der Anamorphose sind selbsterklärend.

Das Originalbild wird zunächst so in die Mitte zwischen Auge und Spiegel gebracht, dass der Lichtstrahl vom Auge unter dem gewählten Blickwinkel senkrecht zur Bildebene steht. Dann wird mit `Function RandstrahlenTreffenSpiegel` geprüft (siehe Quellcode auf der beiliegenden CD), ob die Randstrahlen vom Augpunkt durch die Eckpunkte der Bildvorlage auf den ausgewählten Spiegel treffen. Falls der

Wert, den diese Funktion zurückliefert FALSE ist, wird die weitere Berechnung nicht gestartet und der Benutzer aufgefordert, seine Eingaben zu verändern. Liefert die Funktion den Wert TRUE zurück, so startet das Programm die Berechnung mit den drei Durchläufen. Dabei wird vom Augpunkt aus durch jedes Pixel der Bildvorlage ein Lichtstrahl auf den Spiegel geschossen, der den Lichtstrahl reflektiert. Trifft der reflektierte Strahl auf die Papierebene (Grundebene), so wird das getroffene Pixel in der Farbe des Pixels der Bildvorlage gefärbt. Je nachdem wie die Auflösung der Zieldatei gewählt wurde, werden einige Pixel der Grundebene nicht getroffen und bleiben dementsprechend weiß. Dieses Problem tritt bei allen Programmen zur Berechnung von Anamorphosen auf und kann (wie im vorliegenden Programm geschehen) durch Interpolation behoben werden. Allerdings sollte aufgrund des enormen Rechenaufwands zunächst auf eine interpolierte Darstellung verzichtet werden.

Verbesserungsmöglichkeiten des Computerprogramms

Da in diesem Kapitel einige der vielen verschiedenen Möglichkeiten zur Herstellung von Anamorphosen beschrieben werden sollten, stand an dieser Stelle nicht ein vollständig ausgereiftes Programm, sondern vielmehr der Beweis der Möglichkeit, auf diese Weise eine Anamorphose erstellen zu können, im Vordergrund. Wie die Abbildungen 35 und 36 zeigen, kann dieser Beweis (*proof of concept*) als erfolgreich bezeichnet werden. Besonders auffällig ist die Tatsache, dass das anamorphotische Bild eines Herzes wiederum ein Herz darstellt (siehe Abb. 36, links).

Weitere mit diesem Programm erstellte Anamorphosen sind auf der CD im Ordner *Computerprogramm\Grafiken\Anamorphosen* abgelegt.

Das Programm reagiert mitunter äußerst sensibel auf die vom Benutzer gewählten Parameter. Eine sinnvolle Erweiterung, die auf das vorliegende Programm basiert, könnte darin bestehen, dass das Programm selbstständig sinnvolle Parametereingaben vorgibt und die virtuelle Quellbildgröße automatisch so anpasst, dass die Randstrahlen durch die Eckpunkte der Bildvorlage stets den Spiegel treffen, wenn dies

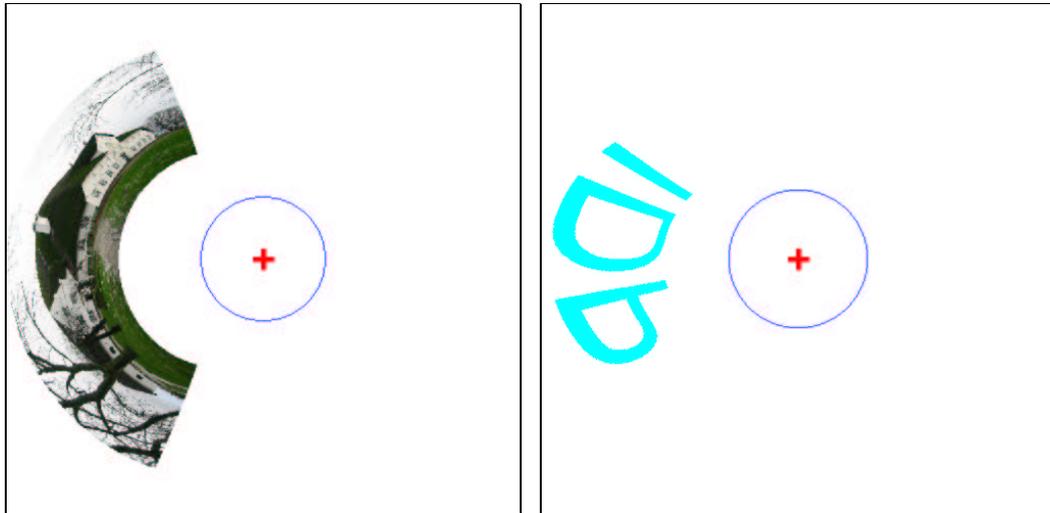


Abbildung 35: Mit dem selbst erstellten Programm berechnete Anamorphosen. Links ist eine Zylinderanamorphose abgebildet, während rechts das Ergebnis einer Berechnung für eine Kugelanamorphose dargestellt ist.

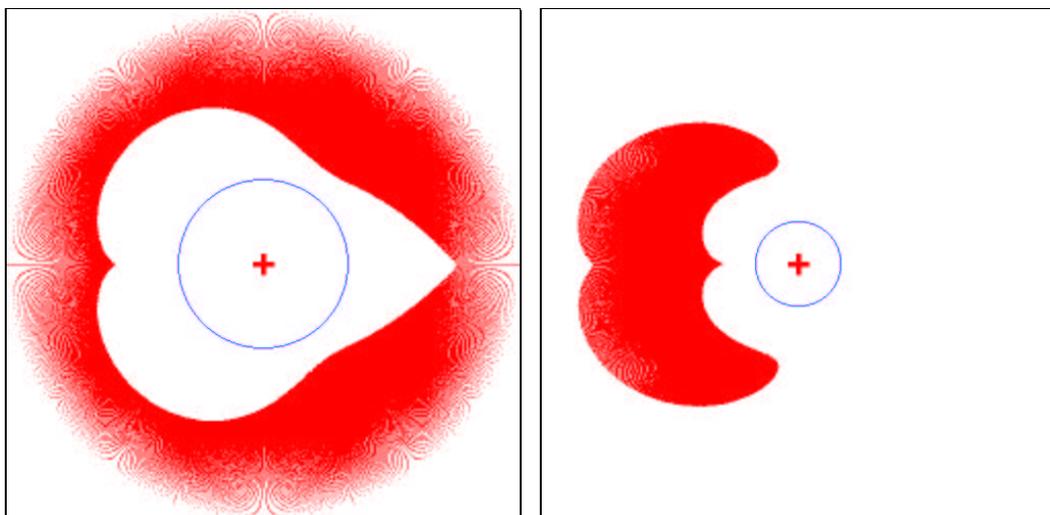


Abbildung 36: Die linke Kegelanamorphose ergibt sich bei senkrechter Betrachtung eines Herzes von oben, während der Spiegelkegel bei der rechten Abbildung von schräg oben betrachtet wird.

– bedingt durch die anderen Parameter – theoretisch möglich ist. Einen weiteren Ansatzpunkt bildet die Tatsache, dass der Blickwinkel des Benutzers bisher nur gegenüber der Horizontalen (x -Achse) verändert werden kann. In einer erweiterten Version könnte der Benutzer beispielsweise einen Blickwinkel gegenüber der y -Achse wählen.

5.5.2 Bereits existierende Programme zur Berechnung von katoptrischen Anamorphosen

Ebenso wie die zeitgemäße Methode des Raytracing-Verfahrens können die im Abschnitt 5.2.1 gefundenen Gleichungen von einem Computerprogramm in der Weise genutzt werden, dass der Computer aus einer Bildvorlage mit vielen verschiedenen Punkten die entsprechenden Anamorphosenpunkte errechnet. Dabei wird die Bildvorlage wiederum Pixel für Pixel eingelesen, um nach der Transformation die Anamorphose als Computergrafik auszugeben. Ein solches, klassisches DOS-Programm namens `Anamorph.exe` wurde von Jürgen BERGAUER im Institut für Theoretische Mechanik an der Universität Karlsruhe im Jahr 1993 entwickelt. Mit diesem Programm ist es möglich, Zylinderanamorphosen einer Bildvorlage zu erstellen, die im TGA-Format vorliegen muss.

Ein wesentlich moderneres und um einige Funktionen erweitertes Programm, das wie das von mir erstellte Programm auf dem Ray-Tracing-Verfahren beruht, wurde von Friedel ULRICH, im Rahmen seiner Abitur-Facharbeit im Jahr 1999 entwickelt. Dieses Programm `AnamorphUlrich.exe` läuft unter MICROSOFT WINDOWS 95/98/NT (32 Bit). Es werden mehrere Dateiformate unterstützt, jedoch ist die Stabilität des Programmes noch nicht gewährleistet. Dieses Programm ist ebenso wie das von Herrn BERGAUER im Internet auf den Seiten der Technischen Universität München verfügbar.⁴ Aufgrund des oben beschriebenen Problems bzgl. nicht

⁴<http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/anamorph/>

getroffener Pixel in der Papierebene stellt Herr BERGAUER ein weiteres Programm namens `Missing.exe` zur Verfügung, das durch Interpolation das berechnete, verzerrte Bild mit den fehlenden Farbpunkten bereinigt, während die Interpolation in den anderen Programmen bereits integriert ist.

Ein weiteres Programm namens `AnamorphMe.exe` zur computergestützten Berechnung von Anamorphosen findet sich ebenfalls im Internet.⁵ Dieses Programm wurde von Phillip KENT im Jahr 2001 erstellt und läuft bereits in der verfügbaren Version 0.2 sehr stabil unter MICROSOFT WINDOWS 95/98/ME/NT/2000.

Es muss jedoch beachtet werden, dass bei der Erstellung von Anamorphosen auf diese Weise die Schüleraktivitäten auf die Bedienung des jeweiligen Programms reduziert werden. Der Computer als „Black Box“ liefert die gewünschte Anamorphose, ohne dass sich der Schüler tiefer mit dem Problem befassen müsste. Nimmt man jedoch ein Programm als Grundlage, welches von den Schülern noch erweitert und verbessert werden kann, so müssen die Schüler Eigeninitiative zeigen und sich mit den Gegebenheiten am Spiegel auseinandersetzen, um die Erweiterung implementieren zu können. Zudem kommen an dieser Stelle Kenntnisse aus dem Fach Informatik zum Tragen.

⁵<http://www.anamorphosis.com/software.html>

6 Qualitative Erklärungen von Luftspiegelungen

Neben den Zerrbildern, die wir selbst mit unterschiedlichsten Hilfsmitteln erstellen können, treten in der Natur ebenfalls verzerrte Bilder auf. Beispielsweise lassen sich bei Luftspiegelungen im Allgemeinen Verzerrungen beobachten. Luftspiegelungen können wir jedoch nur betrachten, wenn anormale Temperaturprofile vorliegen. Sie gehören daher zu *anormalen* Refraktionserscheinungen. Im Folgenden werden zunächst *normale* Refraktionserscheinungen, die sich unter Normalbedingungen ergeben, behandelt, um anschließend auf anormale Refraktionserscheinungen wie die verschiedenen Arten der Luftspiegelung einzugehen.

6.1 Refraktionserscheinungen unter Normalbedingungen

Bereits gewöhnliche Temperaturprofile in der Erdatmosphäre haben eine Krümmung von sie durchquerenden Lichtstrahlen zur Folge. Eines der dadurch auftretenden Phänomene ist das der sogenannten *Refraktion*, die nun erläutert werden soll.

6.1.1 Astronomische Refraktion

Als astronomische Refraktion wird die Abweichung der tatsächlichen Lage eines Himmelskörpers von der scheinbaren Lage bezeichnet. Diese Abweichung ist auf die Krümmung von Lichtstrahlen in der Erdatmosphäre zurückzuführen, die von außerirdischen Objekten ausgehen, denn ein von einem Himmelskörper aus dem Vakuum des Weltraums kommender Lichtstrahl muss, um auf die Erdoberfläche zu treffen, zunächst die Atmosphäre durchdringen (siehe Abb. 37).

Ausgehend von einem Brechungsindex $n_{\text{Vakuum}} = 1$ durchläuft der Lichtstrahl auf diesem Wege Luftschichten von zunehmender optischer Dichte. Bei jedem Übergang von einer Schicht in eine dichtere erfährt der Lichtstrahl eine Brechung zum Einfallslot hin. Der Grenzübergang zu infinitesimalen Schichtdicken führt dazu, dass Lichtstrahlen in einem Medium mit kontinuierlicher Änderung der Dichte und damit

des Brechungsindex einen gekrümmten Weg nehmen. Das Auge vermutet das Objekt in der tangentialen Verlängerung des eintreffenden Lichtstrahls, sodass einem Beobachter der jeweilige Himmelskörper höher erscheint als er in Wirklichkeit steht. Diese atmosphärische Strahlenbrechung ist umso größer, je tiefer der Körper am

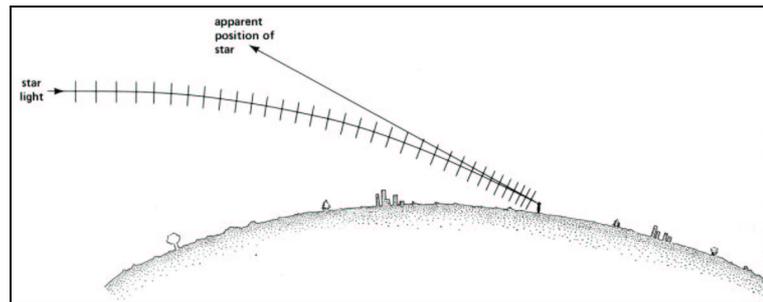


Abbildung 37: Astronomische Refraktion. Quelle: [Greenler 1980]

Himmel steht, denn umso größer ist der Einfallswinkel und damit die Krümmung der Strahlen. Für lotrecht über den Beobachter stehende Gestirne findet keine Strahlenbrechung statt, da die Lichtstrahlen in diesem Fall parallel zur Luftdichteänderung verlaufen.

Infolge der astronomischen Refraktion kann beispielsweise ein Stern, der direkt am Horizont zu stehen scheint, noch gesehen werden, obwohl er in Wirklichkeit schon bis zu 36 Bogenminuten, das heisst $0,6^\circ$, unter dem Horizont verschwunden ist. Diese Abweichung stellt für die Navigation und für die Positionsbestimmung von Gestirnen eine Fehlerquelle dar, die im Interesse einer hohen Messgenauigkeit berücksichtigt werden muss.

Da die Durchmesser von Sonne bzw. Mond nur 32 bzw. 31 Bogenminuten betragen, können diese beiden Himmelskörper wegen der astronomischen Refraktion noch (oder schon) über dem Horizont gesehen werden, wenn sie sich in Wirklichkeit bereits unter (oder noch nicht über) dem Horizont befinden ([Pernter u.a. 1922],

S. 67). Dies betrifft also Auf- und Untergang von Sonne und Mond und es ergibt sich die Verlängerung des Tages. In den Polargebieten, in denen zu einer bestimmten Jahreszeit der Übergang vom polaren Winter zum polaren Sommer stattfindet, kann dieser Effekt eine erhebliche Verkürzung der Polarnacht hervorrufen. Auf der Insel Nowaja Semlja beginnt der polare Sommer wegen der astronomischen Refraktion in einigen Jahren um bis zu 15 Tage früher, als geometrische Berechnungen ergeben ([Dietze 1957], S. 36).

Ferner lässt sich mithilfe einer stärkeren Refraktion am Horizont die Beobachtung erklären, dass die Sonne beim Auf- und Untergang am unteren und oberen Rand abgeplattet, also verzerrt, erscheint (siehe Abb. 38): So bewirkt dieses Phänomen eine um ca. 6 Bogenminuten stärkere Erhöhung des unteren Randes der Sonne als des oberen. Daraus ergibt sich der vertikale Durchmesser der Sonne zu 26 Bogenminuten, während der horizontale Durchmesser konstant bei 32 Bogenminuten bleibt. Dieser Effekt ist ebenfalls beim Mond zu beobachten, jedoch wird er nur bei Vollmond auffällig.

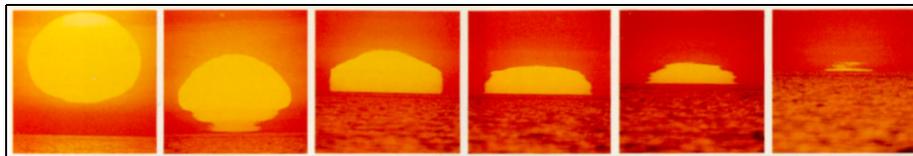


Abbildung 38: Folge von Aufnahmen, die Verzerrungen der aufgehenden Sonne zeigt.

Die beschriebene Abplattung der Sonne ist auf dem äußersten, linken Foto zu erkennen. Quelle: [Greenler 1980]

6.1.2 Terrestrische Refraktion

Neben den von Himmelskörpern ausgehenden Lichtstrahlen erfahren auch von irdischen Objekten kommende Lichtstrahlen eine atmosphärische Strahlenbrechung. Dabei werden diese Lichtstrahlen nach dem gleichen Prinzip wie bei der astronomi-

sehen Refraktion außerirdischer Lichtstrahlen konkav zur Erde gekrümmt, da unter Normalbedingungen der Brechungsindex am Boden größer ist als in einiger Höhe. Die Abweichung, die sich dadurch ergibt, dass die Lichtstrahlen sich nicht geradlinig fortpflanzen, wird als terrestrische Refraktion bezeichnet. Ebenso wie ein Stern bei der astronomischen Refraktion erscheint in Abbildung 39 die Bergspitze A um den Winkel β gehoben im Punkt A' . Umgekehrt wird ein Beobachter B im Tal von der Bergspitze A aus gesehen um den Winkel α gehoben und bei B' wahrgenommen.

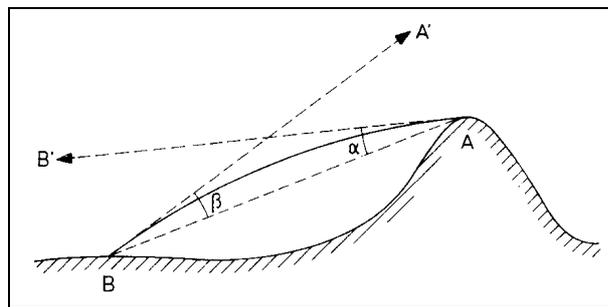


Abbildung 39: Terrestrische Refraktion hebt die Bergspitze A bzw. einen Beobachter B im Tal um den Winkel β bzw. α .

Quelle: [Löw 1990]

Weitere Folgen der terrestrischen Refraktion stellen die Hebung und Erweiterung des Horizonts für einen Beobachter auf der Erdoberfläche dar (siehe Abb. 40). Ausgehend von einem geradlinigen Verlauf der Lichtstrahlen wäre der sichtbare Horizont durch den Punkt K' der Erde gegeben, den die Tangente vom Auge des Beobachters an die Erdkugel trifft. Die konkave Krümmung der Lichtstrahlen bewirkt, dass auch Licht von weiter entfernten Punkten in das Auge des Beobachters fällt und somit den sichtbaren Horizont erweitert. Der Winkel zwischen diesem sichtbaren Horizont und der waagerechten Richtung wird als *Kimmtiefe* δ oder *Depression* des Horizonts bezeichnet, während der Winkel α zwischen dem geometrischen Horizont und der waagerechten Richtung *geometrische Depression* des Horizonts heißt. Die Differenz

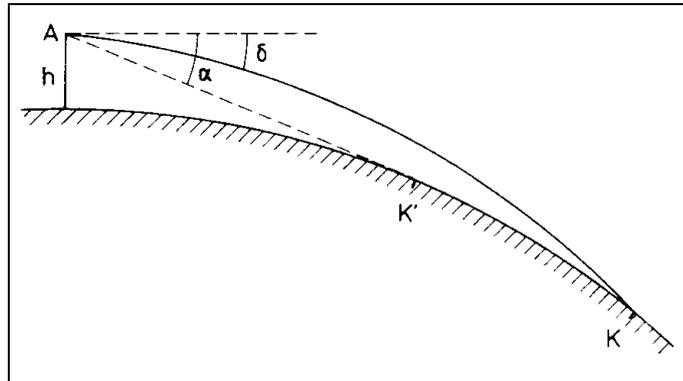


Abbildung 40: Der sichtbare Horizont ist aufgrund der terrestrischen Refraktion größer als der geometrische Horizont. Quelle: [Löw 1990]

$\alpha - \delta$ der beiden Winkel ist die terrestrische Refraktion, die angibt, um welchen Winkel der Horizont gehoben erscheint (vgl. [Dietze 1957]).

6.2 Entstehung von Luftspiegelungen

Luftspiegelungen entstehen, wenn die Bedingungen in den die Erdoberfläche umgebenden Luftschichten so sind, dass Lichtstrahlen auf dem Weg vom Objekt zum Auge des Betrachters gekrümmt werden. Der Beobachter hält den Lichtweg dann irrtümlich für geradlinig und sieht deshalb außer dem direkten Bild ein verschobenes oder gespiegeltes Bild, da das Licht auf zwei verschiedenen Wegen in das Auge des Beobachters gelangt.

Die Krümmung der Lichtstrahlen ergibt sich aufgrund wechselnder Lichtstrahlbrechungen, die durch verschieden dichte Luftschichten zu erklären sind (Feuchtigkeitsverhältnisse sind vernachlässigbar). Der Brechungsindex in den Luftschichten hängt von der Temperatur und vom Druck ab. Bei normalen Verhältnissen nehmen sowohl Temperatur als auch Luftdruck mit steigender Höhe über der Erdoberfläche ab. Während ein Absinken der Temperatur einen steigenden Brechungsindex

zur Folge hat, steht eine Druckabnahme für einen sinkenden Brechungsindex (siehe auch Kapitel 4.3.2). Die optische Dichte in einer bestimmten Höhe ist also von der Größe der jeweiligen Temperatur- und Druckgradienten abhängig. Wie wir bei den Refraktionserscheinungen gesehen haben, ist der Brechungsindex der Luft unter normalen Bedingungen in höheren Luftschichten geringer als am Boden, sodass ein Lichtstrahl in der Atmosphäre auch bei normalen Verhältnissen konkav zum Boden verläuft (vgl. Abschnitt 6.1). Die konkave Krümmung des Lichtwegs zum Boden kann durch entsprechende anormale Dichteverhältnisse in den Luftschichten verstärkt oder sogar umgekehrt werden. Diese unterschiedlichen Dichteverhältnisse in den Luftschichten sind durch anormale Temperaturgradienten bedingt, also dadurch, dass die Temperatur in den unteren Schichten der Atmosphäre extrem nach oben ab- bzw. zunimmt, während sich der Luftdruck in den unteren Schichten nur leicht verändert. Die Temperaturverhältnisse sind also letztlich praktisch allein ausschlaggebend für das Entstehen einer Luftspiegelung (vgl. [Fraser 1976]).

6.3 Arten der Luftspiegelung

In der Vergangenheit gab es zahlreiche Versuche, die vielen unterschiedlichen Erscheinungsformen des Phänomens der Luftspiegelung in eine Systematik einzuordnen. So unterschied zum Beispiel MINASI (1773) zwischen Meeresmorgana, Meer- und Luftmorgana, sowie regenbogengesäumte Morgana. Dies weist zwar auf den Ort des Auftretens hin, ohne allerdings das Wesen des Phänomens näher zu erklären.

Die erste sinnvolle (und noch heute allgemein gebräuchliche) Einteilung von Luftspiegelungen in solche *nach unten* und solche *nach oben* stammt von WEGENER aus dem Jahre 1918 (vgl. [Wegener 1918]) und wird im Folgenden übernommen.

6.3.1 Spiegelung nach unten

Die Luftspiegelung nach unten ist die am häufigsten wahrgenommene Luftspiegelung, da sie auch in gemäßigten Breiten in ihrer bereits erwähnten einfachsten Form als Vorspiegelung von Wasserflächen auf Autobahnen und asphaltierten Straßen eine alltägliche Erscheinung darstellt.

Die Erklärung für dieses Phänomen liegt darin, dass sich die bodennahen Luftschichten über der Erdoberfläche durch intensive Sonneneinstrahlung stärker erwärmen als die darüber liegenden Schichten. Die Luftdichte nimmt also bei einer unteren Luftspiegelung von unten nach oben anormal zu. Ein solches Dichtegefälle ist die Umkehrung der normalen Verhältnisse, bei denen die größte Dichte in der untersten Schicht herrscht. Die daraus resultierende Temperaturabnahme verläuft mit der Höhe natürlich stetig, jedoch ist es nach WEGENER durchaus zweckmäßig, eine scharfe Schichtgrenze anzunehmen.

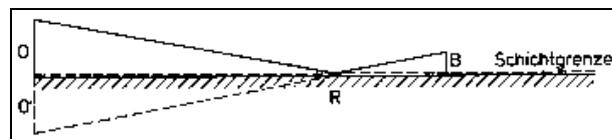


Abbildung 41: Erklärung einer Spiegelung nach unten mithilfe von Totalreflexion an einer Schichtgrenze. Quelle: [Löw 1990]

Abbildung 41 zeigt den Strahlenverlauf, der sich ergibt, wenn man von Totalreflexion an einer Schichtgrenze ausgeht. Dabei liegt die Schichtgrenze im Allgemeinen nur wenige Zentimeter über der Bodenfläche bzw. kann als mit der Bodenfläche zusammenfallend angenommen werden. Es werden nur Lichtstrahlen total reflektiert, die den Grenzwinkel der Totalreflexion überschreiten. Strahlen von weit entfernt liegenden Objekten fallen auf einen Punkt der Erdoberfläche nahezu horizontal ein, sodass als Näherung von Totalreflexion ausgegangen werden kann.

Im Prinzip ergibt sich der gleiche Strahlenverlauf, wenn anstelle einer Totalreflexion eine kontinuierliche Strahlenbrechung als Grenzfall endlich vieler Brechungen an einer Vielzahl paralleler, horizontaler Luftschichten angenommen wird. Ein möglicher Strahlenverlauf ist in Abb. 42 dargestellt. Aufgrund wechselnder Brechungsindizes in den Luftschichten ist eine solche Mehrfachspiegelung möglich. Um zwei aufrechte Bilder und ein umgekehrtes Bild zu erhalten, müssen drei Lichtbahnen mit jeweils unterschiedlicher Krümmung gegeben sein.

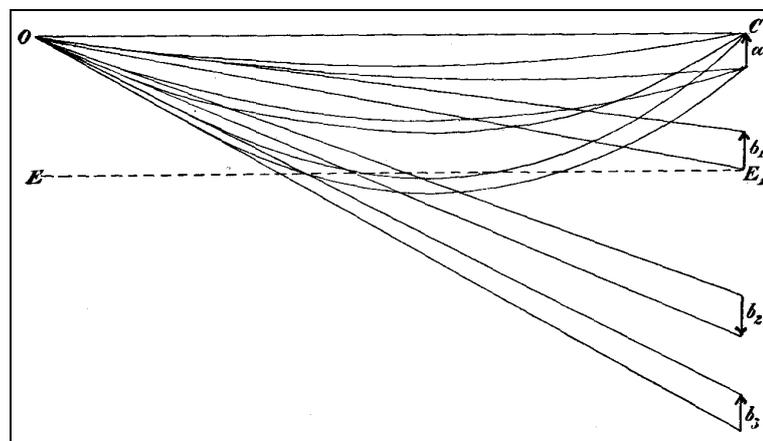


Abbildung 42: Mehrfache Spiegelung nach unten. Quelle: [Pernter u.a. 1922], S. 142

Wie Abb. 42 zeigt, müssen sich die vom oberen und unteren Grenzpunkt eines entfernt gelegenen Objektes ausgehenden Lichtstrahlen schneiden, damit der Beobachter ein umgekehrtes Bild sieht. Das direkte Bild b_1 des Gegenstandes a muss stets tiefer als die tatsächliche Lage des Gegenstands a , gesehen werden, da die Lichtstrahlen so verlaufen, dass die Luftschichten höherer Dichte und somit höherer Brechungsindizes auf der offenen Innenseite der Lichtstrahlkurve liegen. Somit liegen das oder die Spiegelbilder immer unterhalb des gespiegelten Gegenstands. Die Lichtstrahlen werden in diesem Modell wegen der Dichteabnahme nach unten immer stärker zur Waagerechten (Brechung beim Übergang von einem dichten Medium in

ein dünneres Medium) abgelenkt und schließlich total reflektiert. Unter der Voraussetzung, dass die Temperaturänderung gleichmäßig mit dem Höhenanstieg einhergeht (konstanter Temperaturgradient), beschreiben die Lichtstrahlen eine Parabel, deren geschlossene Seite in Richtung des Spiegelbildes zeigt.

Die auffälligste Tatsache bei den Luftspiegelungen nach unten ist die „scheinbare Wasserfläche“ oder der „lichte Streifen“ unterhalb des aufrechten Bildes, in der oder dem man meist das umgekehrte Bild des Gegenstandes sieht. Diese scheinbare Wasserfläche ist das Spiegelbild des Teils des Himmels, der hinter dem fraglichen Gegenstand liegt. Von diesem Ausschnitt des Himmels kommen Strahlen ins Auge, die analog zu denen von b_1 bzw. b_2 in Abb. 42 verlaufen. Die letzteren erzeugen in der Umgebung von b_2 ein umgekehrtes Bild des Himmelsausschnitts, das aber als solches nicht zu erkennen ist. Vielmehr sieht man nur die Farbe und den Glanz des Himmels im Umkreis von b_2 , was den Eindruck einer spiegelnden Wasserfläche oder eines Wasserstreifens hervorruft.

Das Spiegelbild des Himmels wird noch stärker als eine Wasserfläche empfunden, wenn sich in diesem Spiegelbild gleichzeitig auch Objekte wie Bäume, Häuser oder Berge wiederfinden, da sich in der direkt erfahrbaren Natur Gegenstände eben nur in Wasser spiegeln. Ein weiterer Effekt, der das Wahrnehmen der Himmelspiegelung als Wasserfläche verstärkt, ist ihr Zittern bzw. Flimmern. Dies ist dadurch zu erklären, dass in Schichten, die eine für die Spiegelung nach unten nötige anormale Dichteverteilung aufweisen, die Luft in kleinen Strömen aufsteigt, wie dies über Flammen oder erhitzten Flächen zu beobachten ist. Aufgrund dessen erfahren Lichtstrahlen, die diese Schichten durchlaufen, in jedem Moment eine etwas andere Ablenkung, was den Eindruck des Zitterns hervorruft.

Wenn der Blickwinkel zwischen Augenlinie und dem betrachteten Spiegelbild größer wird, verschwindet die Luftspiegelung, da die gekrümmten Lichtstrahlen das Auge des Betrachters bei konstanten Temperaturverhältnissen nicht mehr erreichen. Beim

Näherkommen löst sich die Luftspiegelung also auf, sofern die Dichteverhältnisse der unteren Luftschichten sich nicht entsprechend verändern. Bewegt sich der Betrachter jedoch senkrecht zur Luftspiegelung, so kann sie auch über eine längere Wegstrecke beobachtet werden.

Der Gelehrte Georg BÜSCH beobachtete 1779 eine untere Luftspiegelung, die ihm so deutlich erschien, dass er eine Zeichnung (siehe Abb. 43) davon anfertigte ([Tributsch 1983], S. 46).

Nie sah ich die Erscheinung vollkommener als am 5. Oktober 1779 in der Gegend von Ottersberg, 2 Meilen von Bremen. Die Stadt schien wie in [Abb. 43] jenseits eines ruhigen Wasserspiegels zu liegen, und das umgekehrte Bild war so deutlich, wie ich es nur je gesehen habe. Meine Begleiter hielten das Wasser für die Weser, erstaunten aber nicht wenig, als es verschwand, als wir den 6 Fuß hohen Ottersberger Damm hinauffuhren und eine grüne Wiese bis an die Mauern der Stadt erblickten.

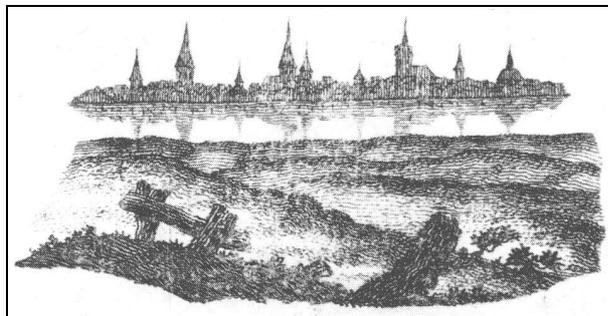


Abbildung 43: Zeichnung einer unteren Luftspiegelung von BÜSCH aus dem 18. Jahrhundert. Quelle: [Tributsch 1983], S. 45

Ein weiterer Effekt, der bei der Spiegelung nach unten auftritt, besteht darin, dass der Horizont aufgrund der konvex zur Erde gekrümmten Lichtstrahlen verkürzt wird. Weit entfernte Objekte können daher in der Luftspiegelung nicht mehr wahrgenom-

men werden.

FRASER und MACH gehen in ihrer Beschreibung von Luftspiegelungen anstelle von gekrümmten Lichtstrahlen von einer gekrümmten Erdoberfläche aus (vgl. [Fraser 1976]). Diese Krümmung des Bodens und der sich darüber befindlichen Höhenlinien kann als untertassenförmig beschrieben werden (siehe Abb. 44). Bei der Spiegelung nach unten liegt die Außenseite der Untertasse in diesem Modell oben, sodass

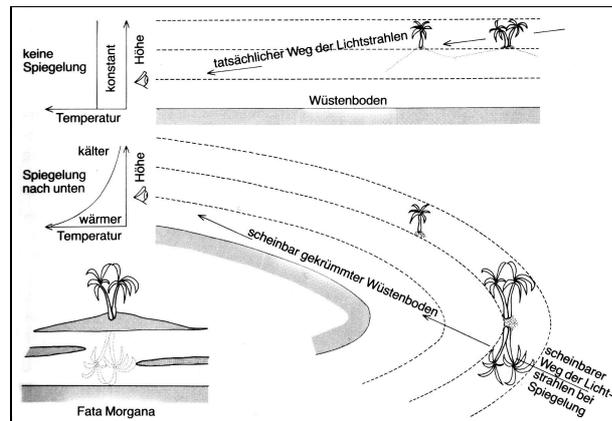


Abbildung 44: Entstehung einer unteren Luftspiegelung nach FRASER und MACH.

Quelle: [Tributsch 1983], S. 43

bei nun geradlinigem Strahlenverlauf nah am Beobachter gelegene Objekte teilweise, weiter entfernte Objekte vollständig weggespiegelt werden können. So lässt sich erklären, dass ein Objekt entlang einer Höhenlinie zunächst als einfaches Bild, dann als doppeltes Bild erscheint und schließlich vollständig verschwindet. Ein Beobachter, dessen Begleiter sich auf das Bild einer Luftspiegelung zubewegt, kann daher feststellen, dass sein Begleiter mit seinen Füßen beginnend langsam in der gespiegelten Wasserfläche der unteren Luftspiegelung versinkt.

Wetterbedingungen für das Auftreten unterer Luftspiegelungen

Die Bedingung, dass der Boden bzw. eine bodennahe Luftschicht wärmer ist als darüber liegende Luftschichten, wird von weiten offenen Flächen, deren Boden von der Sonne gleichmäßig erhitzt werden kann, erfüllt.

Sonnenbestrahlte Wüsten stellen daher einen optimalen Ort für Luftspiegelungen nach unten dar, aber auch in Polargebieten sowie auf geschlossenen Wasserflächen können die Bedingungen geeignet sein. Beispielsweise stellt sich über dem Wasser das gewünschte Temperaturprofil frühmorgens ein, wenn eine kühle Landbrise über das noch relativ warme Wasser streicht. Da Wasser ein schlechter Wärmeleiter ist, wird die tagsüber aufgenommene Wärme bis zum nächsten Morgen gespeichert, um dann die kalte Landluft von unten zu erwärmen. Ebenso sind Luftspiegelungen nach unten häufig auf Rollfeldern von Flugplätzen zu sehen, da sich hier – wie bei der bereits mehrfach genannten Asphaltstraße – der Bodenbelag gegenüber den angrenzenden Grasflächen stark erwärmt.

6.3.2 Spiegelung nach oben

Die Spiegelung nach oben stellt für viele Betrachter ein noch beeindruckenderes Phänomen dar, da sie keine Alltagserscheinung ist. Sie ist weitaus seltener und weniger verbreitet als die Spiegelung nach unten, deren Umkehrung sie beschreibt. Wie der Name verrät, werden bei der Spiegelung nach oben vom Betrachter entfernt liegende Objekte über ihrem tatsächlichen Standort wahrgenommen, was eine Reflexion der Lichtstrahlen an einer oberhalb der Augenhöhe gelegenen Schichtgrenze voraussetzt. Zu erklären ist dieses Phänomen mit einem anormal starken Temperaturanstieg mit der Höhe, d.h. bei der Luftspiegelung nach oben nimmt die Dichte mit der Höhe ab. Da dies den normalen Luftschichtverhältnissen entspricht, müsste dieses Phänomen noch häufiger als die Spiegelung nach oben zu beobachten sein. Die Luftspiegelung nach oben tritt jedoch nur selten auf, da lediglich ein ungewöhn-

lich starkes Dichtegefälle in den unteren Luftschichten der Atmosphäre bewirken kann, dass Lichtstrahlen, die in den oberhalb vom Objekt gelegenen dünneren Luftschichten stets vom Lot weg gebrochen werden (Brechung beim Übergang von einem dichten Medium in ein dünneres Medium), so in das Auge eines Beobachters treffen, dass dieser eine Spiegelung nach oben wahrnimmt.

Abbildung 45 zeigt vereinfacht, wie die Lichtstrahlen bei einer einfachen, oberen Luftspiegelung verlaufen. Löw nennt einen anormalen Temperaturgradienten von

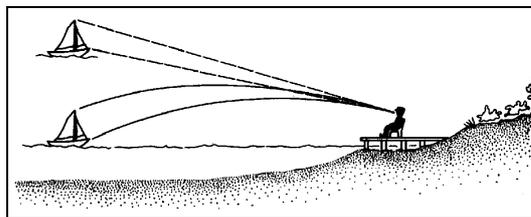


Abbildung 45: Zur Verdeutlichung einer einfachen, oberen Luftspiegelung.

Quelle: [Schremmer 2002]

mindestens $11,2^{\circ}\text{C}$ auf 100 m Höhe als Voraussetzung für das Entstehen einer oberen Luftspiegelung, da die Krümmung der Luftstrahlen dann so stark ist, dass die Erdkrümmung überwunden wird (vgl. [Löw 1990]). Ausgehend von einem solchen Temperaturgradienten fallen die Lichtstrahlen nach Brechung an einer Vielzahl verschiedener homogenen Schichten an einer Schichtgrenze so flach ein, dass sie den Grenzwinkel der Totalreflexion übersteigen und somit total reflektiert werden (siehe Abb.46). Es folgen weitere Brechungen in dichteren Schichten (Brechung beim Übergang von einem dünnen Medium in ein dichteres Medium) bis die Lichtstrahlen das Auge des Beobachters erreichen. Die Lichtstrahlkurve beschreibt hier wieder eine gekrümmte Bahn, die so verläuft, dass die Luftschichten größerer Luftdichte auf der Innenseite der Kurve und das Spiegelbild wieder auf der Warmluftseite liegen. Da hier im Vergleich zur Spiegelung nach unten die Dichte- und Temperaturverhältnisse umgekehrt sind, nimmt folglich auch die Lichtstrahlkurve einen umgekehrten, zur

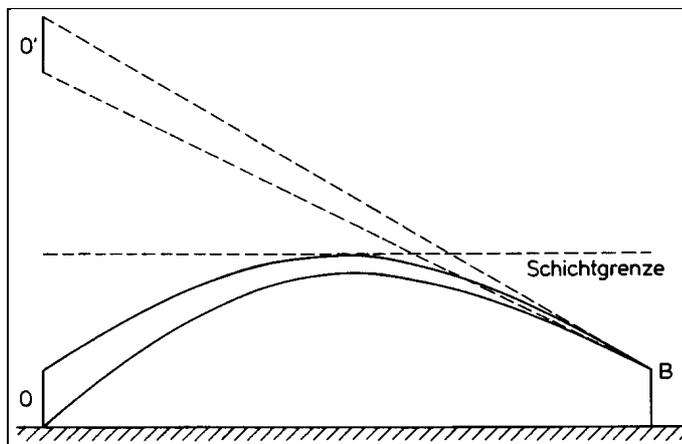


Abbildung 46: Einfache Spiegelung nach oben. Quelle: [Löw 1990]

Erde hin konkaven Verlauf.

Die Entfernungen zwischen Beobachter und Spiegelungen nach oben sind wesentlich größer als bei Spiegelungen nach unten, da die Lichtstrahlkrümmung bei Spiegelungen nach oben aufgrund des relativ geringen Temperaturgradienten von angenommenen $0,112^\circ\text{C}$ pro Meter kleiner ist als bei den Spiegelungen nach unten, bei denen der Temperaturgradient zwischen 1 und 10°C pro Meter liegt. Daher lassen sich Luftspiegelungen nach oben oft über hundert oder noch mehr Kilometer wahrnehmen. Laut einer Zeitungsnotiz vom 05.01.1982 sahen Spaziergänger auf dem Fichtelberg im Erzgebirge (auf dem Gebiet der ehemaligen DDR) bei -4°C vor sich den Böhmerwald auf den Kopf stehend, obwohl der Böhmerwald tatsächlich 250 Kilometer entfernt ist (vgl. [Löw 1990]). Das besonders Beeindruckende liegt hier offensichtlich darin, dass kein direktes Bild des Böhmerwalds beobachtet worden ist, sondern nur ein kopfstehendes desselben. Dies ist dadurch zu erklären, dass das direkte Bild aufgrund der Erdkrümmung nicht in das Auge des Beobachters fällt.

Ein kopfstehendes Bild entsteht dadurch, dass sich Lichtstrahlen auf ihrem Weg vom Gegenstand zum Auge des Beobachters schneiden (siehe Abb. 48). Ähnliche

Beobachtungen hatte VINCE, Professor für Astronomie und Experimentalphysik, bereits im Jahre 1799 gemacht, als er eine Mastspitze eines Segelschiffes über die Kimm ragen sah. Senkrecht darüber konnte er in der Luft noch zwei vollkommene Bilder des Segelschiffes beobachten, wobei sich das obere aufrecht und das untere auf dem Kopf stehend darstellte. VINCE entwarf daraufhin eine entsprechende Zeichnung, die der Skizze in Abb. 47 sehr ähnelt.

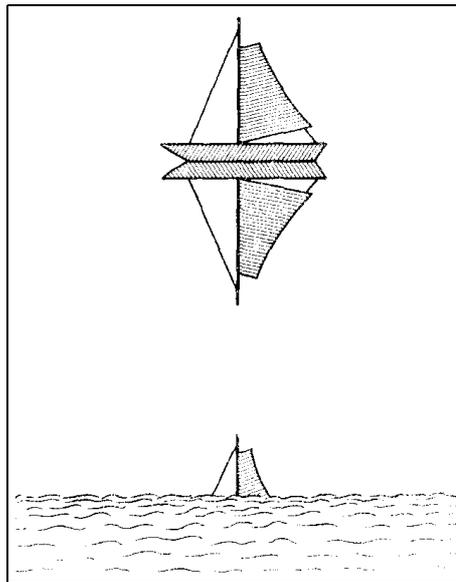


Abbildung 47: Vereinfachte Skizze einer mehrfachen oberen Luftspiegelung nach VINCE. Quelle: [Dietze 1957], S. 48

Mehrfachspiegelungen – wie sie von VINCE beobachtet wurden – sind bei der Spiegelung nach oben generell besser wahrzunehmen als bei der Spiegelung nach unten, da sich am freien Himmel die Spiegelbilder besser beobachten lassen als auf einem dunklen Hintergrund des Erdbodens. Abbildung 48 zeigt einen möglichen Strahlenverlauf bei mehrfachen Spiegelungen nach oben. Bedingung für Mehrfachspiegelungen ist natürlich, dass neben der für die jeweilige Art der Luftspiegelung charakteristischen Luftdichteverteilung eine anormale Schichtung mit mehreren Schichtgrenzen

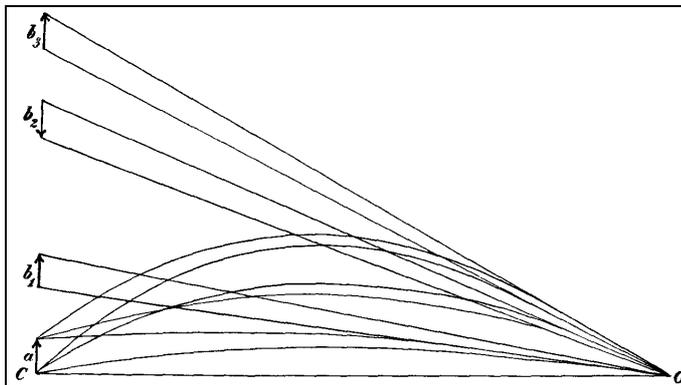


Abbildung 48: Mehrfache Spiegelung nach oben. Quelle: [Pernter u.a. 1922]

vorliegt. Da bei der Spiegelung nach unten nur die untersten Luftschichten in Betracht kommen, beeinflussen vergleichsweise viele Luftschichten mit ihren wechselnden Brechungsindizes die Spiegelung nach oben. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass Mehrfachspiegelungen bei der Spiegelung nach oben häufiger zu beobachten sind.

In Abb. 48 gehen von jedem Punkt des Gegenstands a Lichtstrahlen zum Beobachter O , wobei hier nur drei Lichtbahnen eingezeichnet wurden, für die jeweils der Strahlenverlauf vom unteren und oberen Begrenzungspunkt des Gegenstands zum Beobachter dargestellt ist. Eine in den untersten Schichten herrschende Dichteabnahme bewirkt, dass Strahlen in einem schwach konkaven Verlauf den Beobachter O treffen und das Bild b_1 in der tangentialen Verlängerung der beim Beobachter einfallenden Strahlen etwas höher erscheint. Die Lichtstrahlen, die in die Schichten mit dem stärksten Dichtegefälle unter stärkerer Neigung eintreten, werden total reflektiert. Dabei können die von dem unteren Begrenzungspunkt des Gegenstands ausgehenden Strahlen steiler in diese Schichten eintreten als die von dem oberen Begrenzungspunkt. Somit können sich diese Strahlen vor der totalen Reflexion schneiden, sodass das Bild b_2 umgekehrt wird. Das Bild b_3 wird von den etwas steiler vom Gegenstand a gegen die Schichten des stärksten Gefälles verlaufenden Strahlen erzeugt, die sich nicht vor der totalen Reflexion schneiden.

Wetterbedingungen für das Auftreten oberer Luftspiegelungen

Voraussetzung für eine Spiegelung nach oben ist ruhiges, klares Wetter. Die oben beschriebene Temperaturverteilung tritt beispielsweise in den frühen Morgenstunden nach klaren Nächten ein, wenn der Boden noch ausgekühlt ist und durch horizontale Luftbewegungen Warmluft herangeführt wird. Solche Luftschichtungen finden sich außerdem im Sommer über kalten Meeren, wenn vom bereits erwärmten Land warme Luft über das Meer strömt und dort von unten abgekühlt wird. Auch an sonnigen Wintertagen bei stationären Hochdrucklagen ist ein solches Dichtegefälle möglich. In den gemäßigten Breiten zählen solche Luftschichtungen jedoch nicht zum alltäglichen Wettergeschehen, sodass Luftspiegelungen nach oben hier selten zu beobachten sind.

6.3.3 Seitliche Spiegelungen

Für das Entstehen seitlicher Spiegelungen sind heißes Sommerwetter und klare Sicht Voraussetzung. Bei der seitlichen Spiegelung liegt die Schichtgrenze, an der die Totalreflexion bzw. die Umlenkung der Lichtstrahlen stattfindet, nicht horizontal, sondern vertikal zur Erdoberfläche. Während die Spiegelungen nach oben und unten durch ein vertikales Dichtegefälle charakterisiert sind, ist für eine seitliche Spiegelung ein horizontales Dichtegefälle und somit ein horizontaler Temperaturgradient typisch. Solche Luftschichten, die vertikal eine konstante Temperatur besitzen und sich von angrenzenden vertikalen Schichten in Temperatur und Dichte unterscheiden, können beispielsweise durch die Schattenwirkung einer Bergspitze oder einfach durch die Sonnenbestrahlung einer langen gleichmäßigen Mauer bedingt sein. Eine Auffälligkeit seitlicher Spiegelungen an Mauern oder Wänden liegt darin, dass sie auf kurze Entfernungen von einigen Metern auftreten können. Sind die Schichten gleicher Dichte nicht stets parallel zur Horizontalen gelagert, so findet bereits ein Übergang zur seitlichen Spiegelung statt, die u.a. von FRASER und MACH in [Fraser 1976] als *lateral mirage* bezeichnet wird.

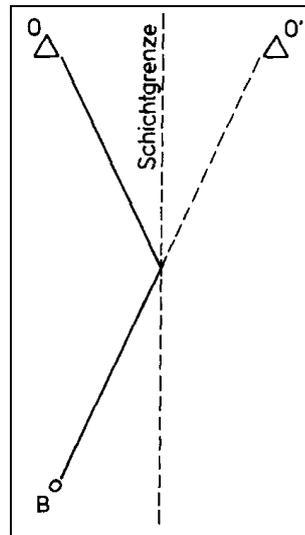


Abbildung 49: Schematische Darstellung einer seitlichen Luftspiegelung.

Quelle: [Löw 1990], S.74

Die Erklärung dieses Phänomens ist dieselbe wie die der Spiegelungen nach oben und unten. Hier ist der Temperaturgradient lediglich in der Horizontalen zu messen. Die Luft, die im Beispiel die Mauer umgibt, hat infolge der reflektierten Wärmestrahlung eine höhere Temperatur als die in größerer Entfernung zur Mauer. Es entsteht in den ersten paar Zentimetern außerhalb der Mauer ein Temperaturgradient. Da die Temperaturänderung horizontal ist, wird das Spiegelbild seitlich abgebildet und bleibt dabei stets aufrecht. Abbildung 49 zeigt eine seitliche Spiegelung aus der Vogelperspektive. Der Beobachter B , der sich ebenso wie ein Objekt O in der kühleren Luftschicht befindet, sieht das seitlich verschobene, aufrechte Bild O' in der tangentialen Verlängerung der beim Beobachter einfallenden Strahlen. Die Schichtgrenze wirkt hier also wiederum wie ein atmosphärischer Spiegel.

6.4 Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen bei Luftspiegelungen

Abgesehen vom Entstehen von Mehrfachspiegelungen und umgekehrten Bildern sind bisher weitere Besonderheiten der Luftspiegelungen nicht berücksichtigt worden. So treten in der Natur bei Luftspiegelungen u.a. Vergrößerungen und Verkleinerungen auf. Die Annahme paralleler, zur Erdoberfläche konzentrischer Luftschichtungen kann zur Beschreibung bestimmter Phänomene (siehe beispielsweise seitliche Luftspiegelung) ebenso wenig herangezogen werden wie die Annahme konstanter Temperaturgradienten (siehe beispielsweise Mehrfachspiegelung).

6.4.1 Vergrößerungen

Ausgehend von der Annahme konstanter Temperaturgradienten ist eine Erklärung beobachteter Vergrößerungen oder Verkleinerungen eines Objekts genauso wenig möglich, da der obere sowie der untere Grenzpunkt des Objekts um denselben Winkel gespiegelt werden. Unter dieser Annahme erscheinen die Luftspiegelungen also immer in der gleichen Größe wie das Objekt selbst.

Vergrößerungen können hingegen beobachtet werden, falls die Dichte in der Vertikalen nicht so abnimmt, wie dies unter gewöhnlichen (normalen) Umständen der Fall ist, sondern mit zunehmender Höhe über dem Erdboden immer schneller. In diesem Fall ist die Dichteabnahme an der Erdoberfläche also kleiner als die in den darüber liegenden Luftschichten und folglich werden die von der Untergrenze eines gespiegelten Objekts O ausgehenden Lichtstrahlen schwächer gebrochen als die von der Obergrenze ausgehenden Strahlen (vgl. Abb. 50). Auf diese Weise wird der Blickwinkel des Beobachters B größer, als dies bei konstanten Dichteabnahmen der Fall wäre, und das Objekt erscheint somit in der tangentialen Verlängerung der beiden Winkelschenkel vergrößert. Da bei seitlichen Spiegelungen häufig nur sehr schmale Luftschichten für das Spiegelungsphänomen sorgen, schwankt der Temperaturgradient hier nicht so stark. Folglich sind dem Temperaturgradienten entsprechend Ver-

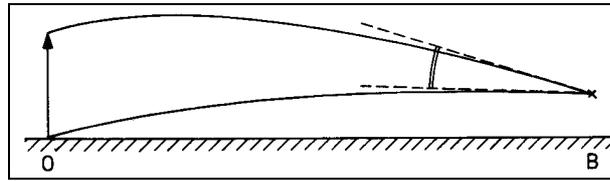


Abbildung 50: Schematische Darstellung einer Vergrößerung aufgrund unterschiedlicher Strahlenkrümmung. Quelle: [Löw 1990]

Vergrößerungen in der Horizontalen häufig schwächer ausgeprägt als in der Vertikalen. Dieser Vergrößerungseffekt vermittelt außerdem den Eindruck der Nähe, da Entfernungen zwischen Beobachter und Objekt aufgrund der Vergrößerung unterschätzt werden. FRASER und MACH bezeichnen den Effekt, dass sich Gegenstände in der vertikalen Richtung ausdehnen, als *towering* (vgl. [Fraser 1976]).

6.4.2 Verkleinerungen

Im Gegensatz zu den Vergrößerungen können Verkleinerungen beobachtet werden, wenn der unter Normalbedingungen herrschende vertikale Dichtegradient nach oben abnimmt, das heißt, wenn die Dichte mit zunehmender Höhe über dem Erdboden immer langsamer abnimmt. Da die Dichteabnahme nahe an der Erdoberfläche dann größer als in den darüber liegenden Luftschichten ist, werden die von der Untergrenze eines gespiegelten Objekts O ausgehenden Lichtstrahlen stärker gebrochen als die von der Obergrenze ausgehenden Strahlen. Der Blickwinkel des Beobachters B ist also kleiner, als dies beispielsweise bei konstanten Dichteabnahmen der Fall wäre, und das Objekt erscheint verkleinert bzw. in die Ferne gerückt. Dieser Effekt führt dazu, dass Entfernungen zwischen Beobachter und Objekt überschätzt werden. Oft wird beobachtet, dass im Verlauf eines Sommertages Spiegelbilder zusammenschrumpfen. Das ist typisch für Spiegelungen nach unten, da sich unter intensiver Sonnenbestrahlung die Luftschichten umso stärker aufheizen, je näher sie sich am

Boden befinden, sodass in Bodennähe größere Temperaturgradienten herrschen als in den darüber liegenden Luftschichten. FRASER und MACH bezeichnen den Effekt, dass sich Gegenstände in der vertikalen Richtung zusammenziehen, als *sinking*.

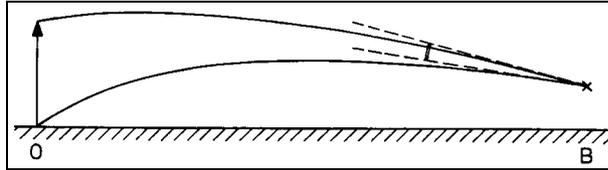


Abbildung 51: Schematische Darstellung einer Verkleinerung aufgrund unterschiedlicher Strahlenkrümmung. Quelle: [Löw 1990]

6.5 Die Fata Morgana

Die deutschsprachige Literatur enthält keine klare Abgrenzung der Begriffe Luftspiegelung und Fata Morgana. In den Nachschlagewerken und Lehrbüchern sind die Begriffe nicht einheitlich erklärt. Eine Luftspiegelung, deren Strahlenverlauf und Spiegelbild besonders komplex sind, wird in der Nomenklatur der atmosphärischen Optik als *Fata Morgana* bezeichnet, während einfache Spiegelungen nach oben und unten *Luftspiegelungen* heißen.

Bei der Fata Morgana handelt es sich um ein verwirrendes Naturschauspiel, das ein Beobachter wirklich sieht. Die Fata Morgana ist nämlich kein Hirngespinnst eines Verdurstenden; vielmehr kann ein Beobachter die Täuschung fotografieren. Diese Täuschung beinhaltet aber immer tatsächlich vorhandene Gegenstände. Die Schichtungen der Atmosphäre sind bei dem Phänomen der Fata Morgana jedoch so kompliziert, dass aus einer einsamen Palme beispielsweise ein ganzer Hain zu entstehen scheint. Der Begriff Fata Morgana verdankt seinen Namen einer Schicksalsgöttin bzw. Fee (lateinisch: fatua) namens Morgana. So wurde die Fee Morgana auch für die wundersamen Erscheinungen verantwortlich gemacht, die von ANGELUCCI be-

reits am 14. August 1643 in der Straße von Messina beobachtet und beschrieben wurden ([Tributsch 1983], S. 80):

[...] In diesem Spiegel zeigte sich dann eine Reihe von Säulen von etwas bleicher Farbe, wohl über 10 000 an der Zahl, alle gleich hoch und gleich weit voneinander. Im Augenblick verschwanden diese und verwandelten sich in Kanäle und Wasserleitungen wie die zu Rom. Oben auf dem runden Bogen, wo die Kanäle waren, gestaltete sich eine Sammlung von allerhand Figuren und Säulen. Oben auf diesen kamen schöne Schlösser, welche auf einem großen Platze standen und alle einerlei Form und Farbe hatten. [...] Und alles das verschwand und wurde zu Meer, da ein sanfter Wind über die Fluten strich.

Ein weiterer Augenzeugenbericht stammt von dem Schotten SCORESBY, der sich am 18. Juli 1820 auf einer Forschungsreise nach Grönland befand und folgende Erscheinung bemerkte, die er selbst aufzeichnete (siehe Abb. 52) und wie folgt beschrieb:

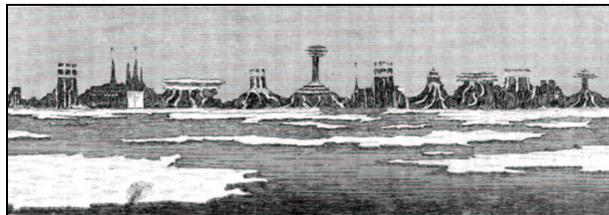


Abbildung 52: Zeichnung einer von SCORESBY im Jahre 1820 beobachteten Fata Morgana vor der Küste Grönlands. Quelle: [Pernter u.a. 1922], S. 168

[...] Das ganze Bild war eine große Phantasmagorie. Es war kaum möglich, irgend ein bestimmtes Detail desselben fertig zu zeichnen, als sein Anblick sich schon veränderte und die Gestalt eines gänzlich verschiedenen Gegenstandes annahm. [...] Ein Anblick großartigster Art. Trotz der

wiederholten Wandlungen hatten alle in der Figur abgebildeten Gestalten die volle Bestimmtheit der Wirklichkeit. ([Perner u.a. 1922], S. 168)

Heute ist bekannt, dass es sich bei der Fata Morgana um Überlagerungen verschiedener Arten von Luftspiegelungen handelt. Es liegen hier sehr komplexe Strahlenbrechungen vor, die in der Straße von Messina sowie in den polaren Regionen vor Grönland aufgrund ihrer geographischen Lage besonders häufig beobachtet werden können.

Die unterschiedlichen Strahlenbrechungen kommen dadurch zustande, dass die Luftschichten gleicher Dichte nicht horizontal und parallel zueinander liegen, sondern aus dieser „normalen“ Lage herausgebracht sind. Eine wellenförmige Schichtgrenze beispielsweise bewirkt – wie bei einer Spiegelung einer Straßenlaterne im bewegten Wasser –, dass die Totalreflexion mehrfach ihre Richtung ändert. Auf diese Weise können Lichtstrahlen auf vielen verschiedenen Wegen ins Auge gelangen, wobei die Lichtstrahlen unter den verschiedensten Winkeln von Gegenständen ausgehen. Mehrfachspiegelungen, die, wie wir oben gesehen haben, durch Überschneiden der Lichtstrahlen entstehen, und Vergrößerungen sind ebenso charakteristisch für eine Fata Morgana wie das Schwanken bzw. die Veränderlichkeit der Spiegelbilder: Gegenstände bzw. ihre Spiegelbilder verschwinden wie ANGELUCCI es beschreibt, und neue tauchen auf. Dies lässt sich so erklären, dass die Luftschichten in Bewegung sind und die Bedingungen, die noch in diesem Augenblick einen Gegenstand erscheinen lassen, im nächsten Moment schon nicht mehr gegeben sind, während gleichzeitig die Bedingungen zum Sichtbarwerden eines anderen Gegenstandes erfüllt werden.

Eben diese sogenannte *Szintillation* sorgt für eine Vibration der Spiegelbilder und verändert außerdem ihre Lichtintensität. Genauer tritt dieser auch von anderen Augenzeugen häufig beobachtete Helligkeitswechsel infolge sogenannter *gravity waves* auf, die den Temperaturgradienten periodisch leicht ändern. Diese Wellen entstehen dadurch, dass die Oberfläche einer Luftschicht durch Turbulenzen angestoßen wird

und aufgrunddessen um ihre horizontale Lage oszilliert.

Die Fata Morgana gilt als der Inbegriff der Luftspiegelung, da sich in ihr viele verschiedene Arten von Luftspiegelungen jeweils mit ihren charakteristischen Eigenschaften wiederfinden. Obwohl die Fata Morgana stets ihren Ursprung in einem realen Gegenstand hat, kann durch die vielen oben beschriebenen Effekte jede Ähnlichkeit mit dem gespiegelten Objekt verloren gehen. In Augenzeugenberichten tauchen jedoch wie bei ANGELUCCI immer wieder Städte, Schlösser, Türme und Säulen auf, da das menschliche Gehirn die wahrgenommenen Spiegelbilder mit bekannten Gegenständen assoziiert.

7 Quantitative Erklärungen von Luftspiegelungen

Nach den qualitativen Aussagen über die Ausbreitung der Lichtstrahlen bei Luftspiegelungen sollen im Folgenden einige Modelle zur Berechnung von Luftspiegelungen betrachtet werden. Damit ist es möglich, den Verlauf von Lichtstrahlen sowie die Anzahl auftretender Bilder vorausszusagen.

7.1 Verlauf der Lichtstrahlen

In Kapitel 6 wurde das Phänomen der Luftspiegelungen durch eine Vielzahl von Brechungen und einer tatsächlichen Spiegelung eines Lichtstrahls beim Auftreffen auf ein optisch dünneres Medium erklärt. Das Verhalten eines Lichtstrahls in einem homogenen Medium sowie an der Grenzfläche zweier Medien ist aus Kapitel 4 bekannt, sodass hier eine genauere Untersuchung des Lichtstrahlweges erfolgen kann.

Lichtstrahlen, die durch die Atmosphäre verlaufen, werden aufgrund eines sich kontinuierlich ändernden Brechungsindizes auf ihrer Bahn ständig abgelenkt. Ausgehend von zur Erde parallelen Luftschichtungen unterschiedlicher Dichte ist für einen unter dem Winkel φ_1 auf die Grenzfläche zweier Schichten treffenden Lichtstrahl das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz (Gleichung (4.18)) anzuwenden (siehe Abb. 53). Der gebrochene Strahl trifft anschließend unter dem Winkel φ_2 auf die nächste Schicht. Dieses Verhalten setzt sich sukzessive an den weiteren Luftschichten fort und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}n_1 \sin \varphi_1 &= n_2 \sin \varphi_2, \\n_2 \sin \varphi_2 &= n_3 \sin \varphi_3, \\&\vdots\end{aligned}\tag{7.1}$$

Beim Übergang zu einer infinitesimalen Schichtdicke erhalten wir einen konstanten Wert, der den Lichtstrahl an jedem Punkt beschreibt. Der Einfallswinkel gegenüber dem Lot und die Brechzahl in einem Punkt genügen zur Berechnung der für jeden

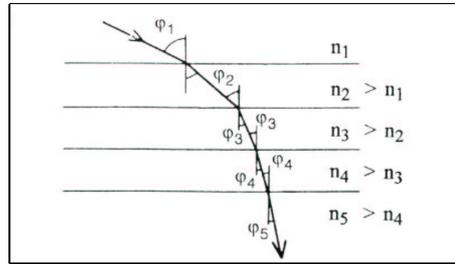


Abbildung 53: Sukzessive Lichtstrahlbrechung an parallelen Luftschichten.

Quelle: [Vollmer 1995]

Lichtstrahl charakteristischen Konstanten, die mit a bezeichnet werden soll. Unter Annahme eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen x -Achse parallel zur Erdoberfläche liegt und deren positive z -Achse senkrecht nach oben zeigt, ergibt sich mit $n \sin \varphi = a$ für eine Lichtkurve eine Differentialgleichung zur Beschreibung des Lichtstrahls (vgl. [Pernter u.a. 1922]):

$$\frac{dx}{dz} = \pm \tan \varphi = \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \pm \frac{a}{\sqrt{n^2 - a^2}}. \quad (7.2)$$

Allgemein soll nun die Brechzahl in Abhängigkeit von der Höhe einer Gleichung der Form $n^2 = f(z)$ genügen. Die Differentialgleichung wird dann durch die Lichtstrahlgleichung

$$x = c \pm a \int \frac{dz}{\sqrt{f(z) - a^2}} \quad (7.3)$$

gelöst.

7.2 Methode der Scheitelpunktskurve nach TAIT

Das im Jahre 1882 von TAIT verfeinerte Scheitelpunktsmodell, das schon BIOT bekannt war, ermöglicht die Bestimmung von Anzahl und Lage der Spiegelbilder bei einer Luftspiegelung. TAIT betrachtet dazu die Scheitelpunkte der gekrümmten Lichtwege und geht zunächst davon aus, dass sich das Auge eines Beobachters in

der gleichen Höhe wie das betrachtete Objekt befindet. Wenn die Bahn der Lichtstrahlen einen Scheitelpunkt besitzt, so muss für diesen Punkt $\frac{dz}{dx} = 0$ gelten. Aus der Differentialgleichung (7.2) folgt, dass diese Bedingung erfüllt wird, wenn für die noch unbestimmte Funktion $f(z) = a^2$ gilt (vgl. [Pernter u.a. 1922]). In diesem Punkt kann aufgrund des horizontalen Lichteinfalls bezüglich der Luftschichten von Totalreflexion ausgegangen werden. Aufgrund der Eigenschaft eines Scheitelpunktes ($\varphi_{\text{Scheitel}} = 90^\circ$) wird durch (7.1) bestätigt, dass nur flach einfallende Strahlen zu Luftspiegelungen führen können, da sich die Brechzahlen benachbarter Luftschichten nur gering unterscheiden. Der Scheitelpunkt habe die Koordinaten (ξ, η) ; dann folgt aus der Lichtstrahlgleichung (7.3)

$$\xi = c \pm a \left[\int \frac{dz}{\sqrt{f(z) - a^2}} \right]_{z=\eta} \quad (7.4)$$

und durch Elimination von c erhält man

$$x = \xi \pm a \int_{\eta}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z) - a^2}}. \quad (7.5)$$

Da die Lichtkurven offensichtlich symmetrisch zur Geraden $x = \xi$ verlaufen, müssen die Scheitelpunkte möglicher Lichtwege auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsgerade zwischen Augpunkt M und Gegenstandspunkt A bzw. B liegen (siehe Abb. 54).

Wenn der Beobachter im Punkt M die Koordinaten $(0, m)$ hat, so beschreibt

$$\xi = n(\eta) \int_{\eta}^m \frac{dz}{\sqrt{f(z) - n^2(\eta)}} \quad (7.6)$$

die Scheitelpunkte aller in das Auge treffenden Lichtstrahlen, wobei in der Konstanten $a = n(\eta)$ jeweils die Werte des entsprechenden Scheitelpunktes stehen. In Abb. 54 gibt die gestrichelte Linie die Lage aller Scheitelpunkte an, die in das Auge des Beobachters in M fallen. Die Anzahl der gesehenen Bilder ergibt sich nun als Anzahl der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten auf die Verbindungsgerade von Aug- und Objektpunkt mit der Scheitelpunktskurve. In diesem Beispiel sind also

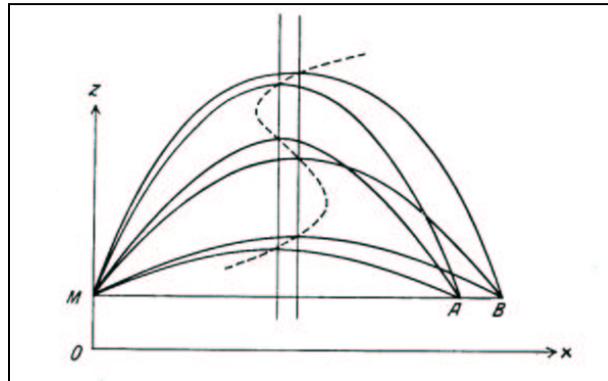


Abbildung 54: Die gestrichelte Linie stellt die Scheitelpunktskurve dar.

Quelle: [Schiele 1935]

drei Bilder zu beobachten. Bei der Frage, ob es sich dabei um aufrechte oder umgekehrte Bilder handelt, bietet die Scheitelpunktmethode ebenfalls eine Lösung. Bei einem Objekt, das durch die Endpunkte A und B begrenzt wird und sich in der gleichen Ebene wie der Beobachter befindet, ergibt sich für jeden der beiden Begrenzungspunkte eine Mittelsenkrechte. Die Scheitelpunkte der von A und B ausgehenden Strahlen müssen, damit sie in das Auge des Beobachters fallen, auf der entsprechenden Mittelsenkrechten der Strecken \overline{MA} bzw. \overline{MB} liegen. Wenn nun der Scheitelpunkt des Strahls von B höher liegt als der des von A kommenden, so erhält man ein aufrechtes Bild des Gegenstandes AB . Liegt dagegen der Scheitelpunkt des Objektpunktes B tiefer als der des nähergelegenen Punktes A , so ergibt sich ein umgekehrtes Bild, da sich die von A und B ausgehenden Strahlen auf ihrem Weg schneiden müssen. Anhand der Scheitelpunktskurve ist es daher möglich, zu bestimmen, ob ein aufrechtes oder ein umgekehrtes Bild zu erwarten ist.

Aus Abb. 54 ist ersichtlich, dass sich Strahlen, deren Scheitel in Bereichen der Scheitelpunktskurve mit negativer Ableitung ($\frac{dn}{d\xi} < 0$) liegen, vor ihrem Auftreffen auf das Objekt schneiden müssen, während Strahlen, die sich durch Bereiche positiver Ableitung ($\frac{dn}{d\xi} > 0$) fortpflanzen, sich vorher nicht schneiden können (vgl.

[Schiele 1935]). Die gestrichelte Kurve in Abb. 54 stellt ein Beispiel einer Scheitelpunktskurve für eine bestimmte Verteilung der Brechzahl dar. Von den drei Bildern des Objekts AB ist das mittlere Bild umgekehrt, das obere und untere Bild erscheinen aufrecht.

Für den allgemeineren Fall, dass sich das Auge nicht auf gleicher Höhe mit dem Objekt befindet, betrachtet man neben der für das Auge gültigen Scheitelpunktskurve weitere Scheitelpunktskurven, die für das betrachtete Objekt gültig sind. Für jeden Punkt des Gegenstandes lässt sich eine Scheitelpunktskurve bestimmen. In den sich ergebenden Schnittpunkten der Objektscheitelkurven mit der Augenscheitelkurve liegen die Scheitelpunkte der Lichtstrahlen, die von einem Punkt des Objekts in das Auge treffen. Die Anzahl der Schnitte für einen Objektpunkt gibt die Anzahl seiner Spiegelbilder an. Für den Fall, dass es keinen Schnittpunkt gibt, wird der entsprechende Punkt nicht gesehen. Abbildung 55 zeigt ein Beispiel für die Spiegelung nach unten. Es ergeben sich zwei Bilder, da die Anzahl der Schnittpunkte

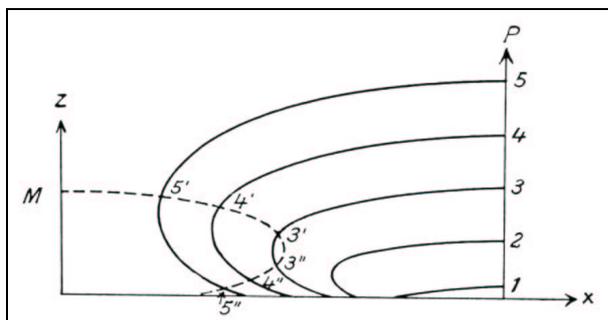


Abbildung 55: Verallgemeinertes Scheitelpunktsverfahren zur Bestimmung von Lage und Anzahl der Bilder. Quelle: [Schiele 1935]

der Objektscheitelkurven mit der gestrichelten Augenscheitelkurve maximal zwei beträgt. Die Objektscheitelkurven für die Punkte 1 und 2 schneiden sich nicht mit der Augenscheitelkurve und werden für den Beobachter in M daher unsichtbar. Außerdem ergibt sich aus der Abbildung, dass aufrechte Bilder entstehen, wenn die

Scheitelpunkte in der gleichen Reihenfolge wie die entsprechenden Objektpunkte übereinanderliegen. Dies ist für die Scheitelpunkte 3', 4' und 5' der Fall, während die Punkte 3'', 4'' und 5'' in umgekehrter Reihenfolge wie die Objektpunkte liegen und daher ein auf dem Kopf stehendes Bild erzeugen.

7.3 Theorie der atmosphärischen Spiegelungen nach WEGENER

Die Theorie von TAIT birgt mathematische Schwierigkeiten, da sie von einem stetigen Temperaturverlauf und somit einer stetigen Verteilung der Brechzahl ausgeht. Beim Aufstellen der Gleichung (7.3) für die Lichtstrahlkurve können bei der Integration angenommener Temperatur- bzw. Brechzahlfunktionen Probleme auftreten. TAIT stellte außerdem später selbst fest, dass die für die in Abb. 54 dargestellte Scheitelpunktkurve angenommene Brechzahlfunktion zur Erklärung einer dreifachen Luftspiegelung nicht sehr geeignet ist.

Aufgrund seiner Beobachtungen während seines vierjährigen Aufenthalts in Grönland schloss WEGENER nun die Möglichkeit aus, den Temperaturverlauf analytisch darstellen zu können. Vielmehr machte er die Entdeckung, dass die von ihm aufgenommenen Zustandskurven gerade die Annahme eines unstetigen Temperaturverlaufs nahe legten. Deshalb geht er in seiner Theorie von einem scharfen Temperatursprung, der einen Sprung der Brechzahl zur Folge hat, an einer Schichtgrenze aus, sodass Lichtstrahlen hier eine Brechung bzw. Totalreflexion erfahren (vgl. [Wegener 1918]). Des Weiteren berücksichtigt WEGENER die Erdkrümmung sowie den Refraktionskoeffizienten k , der das Verhältnis des Erdradius zum Krümmungsradius des Lichtstrahls bezeichnet.

Bei der Spiegelung nach oben nimmt WEGENER eine konzentrisch über der Erdoberfläche oberhalb des Beobachters B gelegene *Inversionsschicht* Z an (siehe Abb. 56). Inversion beschreibt den Fall einer Temperaturänderung mit zunehmender Höhe, die dem gewöhnlichen Temperaturgradienten widerspricht. Im Folgenden

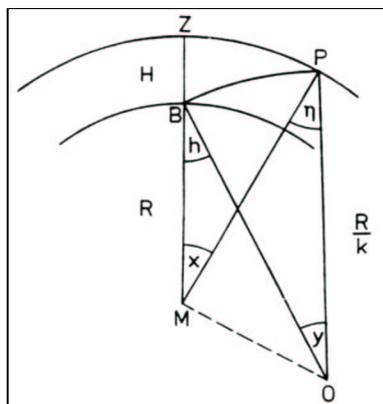


Abbildung 56: Zeichnung zur Herleitung der Theorie für obere Luftspiegelungen nach WEGENER. Quelle: [Löw 1990]

bezeichne M den Erdmittelpunkt, R den Erdradius, O den Krümmungsmittelpunkt des Lichtstrahls vom Beobachter auf der Erde zum Punkt P der in der Höhe H angenommenen Grenzfläche. Per Definition des Refraktionskoeffizienten k gilt dann $\overline{OB} = \overline{OP} = \frac{R}{k}$. Ferner ergibt sich aus den beiden Dreiecken MOP und MOB jeweils nach dem Kosinussatz für das Quadrat der Seite \overline{MO} :

$$R^2 + \frac{R^2}{k^2} - 2\frac{R^2}{k} \cos h = (R + H)^2 + \frac{R^2}{k^2} - 2\frac{R}{k}(R + H) \cos \eta. \quad (7.7)$$

Dabei bezeichnet der Winkel h den Höhenwinkel des Strahls beim Beobachter und $\eta = 90^\circ - \alpha$ das Komplement des Einfallswinkels α an der Schichtgrenze. Setzt man nun $\frac{H}{R} = \varepsilon$ und ersetzt $\cos \eta$ durch $\sin \alpha$, so ergibt sich

$$(1 + \varepsilon) \sin \alpha = \cos h + \frac{k}{2}(2\varepsilon + \varepsilon^2). \quad (7.8)$$

Damit im Punkt P Totalreflexion stattfinden kann, muss der Einfallswinkel α an der Schichtgrenze größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion α_0 sein. Man kann nun einerseits in (7.8) den Term $\frac{k}{2}\varepsilon^2$ wegen der kleinen Größe von ε vernachlässigen und andererseits auch $1 \approx 1 - \varepsilon^2$ annehmen, woraus man

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon \quad (7.9)$$

erhält. Unter Annahme einer horizontalen Blickrichtung des Beobachters (Höhenwinkel $h = 0$) und der Näherung (7.9) ergibt sich α_0 aus (7.8) damit zu

$$\sin \alpha_0 = 1 - \varepsilon(1 - k). \quad (7.10)$$

Die Bedingung für Totalreflexion wird erfüllt, wenn

$$\sin \alpha_0 \geq \frac{1}{n} \quad (7.11)$$

gilt. Dabei bezeichnet n das Verhältnis der Brechzahlen ober- und unterhalb der Schichtgrenze. Setzt man nun $\delta = n - 1$, so kann δ nach WEGENER (siehe (7.13)) als ein Ausdruck für den Temperatursprung angesehen werden. Per Definition ist δ wiederum eine kleine Größe, für die man die Näherungsgleichung (7.9) nutzen kann. Als Bedingung für eine Luftspiegelung nach oben erhält man dann:

$$\delta \geq \varepsilon(1 - k). \quad (7.12)$$

In der Tab. 2 sind einige mit dieser Formel berechnete Temperatursprünge, die für den Eintritt von Totalreflexion mindestens auftreten müssen, für bestimmte Höhen und Refraktionskoeffizienten dargestellt. Die Temperaturunterschiede ergeben sich dabei aus der nach WEGENER gültigen Näherungsformel

$$\delta = 10^{-6} \Delta T. \quad (7.13)$$

Werden die in der Tab. 2 angegebenen Temperaturunterschiede überschritten, so erwartet man also Totalreflexion an der Inversionsschicht. WEGENERS Beobachtungen

	$H = 50m$	$H = 100m$	$H = 150m$	$H = 200m$
$k = 0,2$	$6,3^\circ C$	$12,6^\circ C$	$18,8^\circ C$	$25,1^\circ C$
$k = 0,5$	$3,9^\circ C$	$7,8^\circ C$	$11,8^\circ C$	$15,7^\circ C$

Tabelle 2: Größe der mindestens erforderlichen Temperatursprünge für Totalreflexion. Berechnet nach WEGENERS Näherungsformel (7.13).

stimmen mit den errechneten Werten insofern überein, als bei niedrigeren Schichtgrenzen bereits geringere Temperaturdifferenzen genügen, um Totalreflexion hervorzurufen, während in größeren Höhen die erforderlichen Temperaturunterschiede kaum zu beobachten sind, was der Gültigkeit seiner Theorie jedoch nicht widerspricht.

Die maximale Höhe der Grenzschicht über dem Beobachter, für die noch Totalreflexion angenommen werden kann (bei einer bestimmten Temperaturinversion), wird von WEGENER als Wirkungstiefe W der Inversion bezeichnet und ergibt sich als Grenzfall aus Gleichung (7.12) zu

$$W = \frac{R\delta}{1-k}. \quad (7.14)$$

Im Grenzfall findet nur für den horizontalen Strahl Totalreflexion statt.

Bei einem konstanten Temperaturgradienten tritt unter der Bedingung, dass die Lichtstrahlen von Punkten innerhalb der Wirkungstiefe der Inversion ausgehen, Totalreflexion bereits dann ein, wenn die Strahlen nicht horizontal, sondern unter einem kleinen Höhenwinkel h beim Beobachter einfallen. Gleiches gilt für Temperaturdifferenzen, die die für eine bestimmte Höhe H und einen Refraktionskoeffizienten k berechneten Werte übersteigen. Lichtstrahlen, die von Punkten ausgehen, die unterhalb der Wirkungstiefe der Inversion liegen, treffen unter Winkeln auf die Schichtgrenze, die kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion sind, und werden auf Grund dessen an der Schichtgrenze transmittiert. Es ergibt sich ein spiegelnder Streifen der Breite b , innerhalb dessen alle Strahlen totalreflektiert werden. Für jeden Wert $h > 0$ wird der Einfallswinkel α an der Grenzschicht einen kleineren Wert annehmen als für den horizontalen Strahl ($h = 0$).

Da es sich beim Kosinus um eine gerade Funktion handelt, liefern $\cos(h)$ und $\cos(-h)$ denselben Wert für den Einfallswinkel $\alpha = 90^\circ - \eta$. In der Mitte dieses spiegelnden Streifens, der durch die Winkel $\pm h_0$ begrenzt werde, liegt der astronomische Horizont. Einsetzen der Bedingung (7.11) für die Totalreflexion in Gleichung (7.8)

liefert für den Grenzwinkel h_0 , für den noch Totalreflexion stattfinden kann:

$$\cos h_0 = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \delta} - \frac{k}{2}(2\varepsilon + \varepsilon^2). \quad (7.15)$$

Nutzt man nun die Näherung für kleine Größen (7.9) aus und vernachlässigt wieder den Term $\frac{k}{2}\varepsilon^2$, so erhält man für den Grenzwinkel h_0 :

$$\cos h_0 = 1 - \delta + \varepsilon(1 - k). \quad (7.16)$$

Daraus ergibt sich unter weiterer Vernachlässigung quadratischer Terme und solcher, die das Produkt aus δ und ε enthalten, dass

$$\sin h_0 = \sqrt{2\delta - 2\varepsilon(1 - k)}. \quad (7.17)$$

Da die Breite b des spiegelnden Streifens gleich dem doppelten Betrag des Grenzwinkels h_0 ist, gilt für den spiegelnden Streifen in Bogenminuten

$$b = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sin 1'} \sqrt{\delta - \varepsilon(1 - k)} \approx 9723 \sqrt{\delta - \varepsilon(1 - k)}. \quad (7.18)$$

Beispielsweise erhält man für $H = 50m$, $\Delta T = 10^\circ C$ und $k = 0,2$ einen spiegelnden Streifen von $b = 4,2'$.

WEGENER gibt auch eine allgemeine Gleichung für die Entfernung eines Objekts vom Beobachter an, die für einen beliebigen Strahl gilt:

$$D = \frac{R}{1 - k} (\cos \alpha - \sin h). \quad (7.19)$$

Die minimale Entfernung, die ein Objekt vom Beobachter haben muss, damit der Beobachter eine Luftspiegelung nach oben beobachten kann, ergibt sich für die obere Grenze des spiegelnden Streifens aus Gleichung (7.19) und weiteren geometrischen Überlegungen (siehe [Wegener 1918], S. 216) zu

$$D = \frac{R\sqrt{2}}{1 - k} \left[\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta - \varepsilon(1 - k)} \right]. \quad (7.20)$$

Nach [Schiele 1935] kann diese Gleichung näherungsweise auch für die auf der Erdoberfläche gemessene Entfernung benutzt werden.

In Abb. 57 gilt dann $\overline{BP_1} = D$; in B befindet sich der Beobachter in gewisser Höhe über dem nicht eingezeichneten Erdboden. Der dargestellte Kreis beschreibt die Grenzfläche, auf der die beiden Reflexionspunkte P_1 und P_2 der Grenzstrahlen des spiegelnden Streifens liegen. Der Verlauf der totalreflektierten Grenzstrahlen

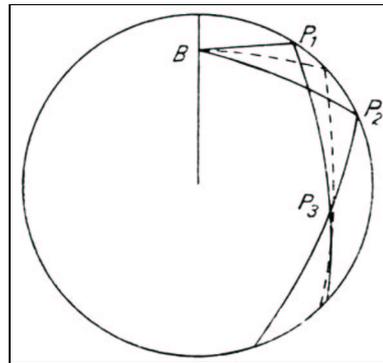


Abbildung 57: Verlauf totalreflektierter Lichtstrahlen nach WEGENER.

Quelle: [Schiele 1935]

sowie des horizontal in B eintreffenden Strahls können der Abbildung entnommen werden. Außerdem ergibt sich aus der Zeichnung, dass Objekte vor P_1 , deren Entfernung vom Beobachter geringer als die erforderliche Minimalentfernung D ist, nur ein aufrechtes, direktes Bild ergeben, während Objekte zwischen P_1 und P_3 ein aufrechtes und ein darüber auf dem Kopf stehendes Bild ergeben. Das aufrechte, direkte Bild versinkt mit zunehmender Entfernung hinter dem Horizont. Bei weiterer Entfernung des Objekts über den Punkt P_3 hinaus, geht das kopfstehende Bild in ein aufrechtes Bild über. Ein sich in der Nähe von P_3 befindlicher Gegenstand wird dann in der Vertikalen sehr stark verzerrt, da alle Strahlen des spiegelnden Streifens fast in dem einen Punkt P_3 zusammenlaufen. Infolgedessen füllt ein kleiner Gegenstand in der Nähe von P_3 bereits die ganze Breite des spiegelnden Streifens aus und erscheint

für den Beobachter in einer maximalen Vertikalverzerrung.

Objekte, die zwar innerhalb des spiegelnden Streifens, aber oberhalb der Grenzfläche liegen, bleiben für den Beobachter unsichtbar. Strahlen oberhalb von BP_1 genügen nicht der Bedingung der Totalreflexion, da ihr Einfallswinkel auf die Grenzfläche zu klein ist; sie verlassen daher die Atmosphäre ebenso wie die Strahlen unterhalb von BP_2 . Auf die Spiegelung nach unten soll hier nicht weiter eingegangen werden, da WEGENER sie in analoger Weise behandelt (vgl. [Wegener 1918], S. 217ff.).

7.4 Topologische Erklärung von Luftspiegelungen

Mithilfe topologischer Prinzipien lassen sich nach TAPE, Professor für Mathematik an der Universität von Alaska, verschiedene Erkenntnisse über die Eigenschaften von Luftspiegelungen gewinnen. Das von ihm entwickelte Modell gibt dabei Aufschluss über die Anzahl sowie über die Orientierung der sich ergebenden Bilder, ohne dass man sich über die mitunter komplizierten atmosphärischen Begebenheiten im Klaren sein muss (vgl. [Tape 1985]).

Es ist bereits dargelegt worden, dass Luftspiegelungen durch gekrümmte Lichtstrahlen erzeugt werden. Ein Lichtstrahl von einem Objektpunkt erreicht das Auge eines Beobachters daher aus einer anderen Richtung als der, in der das Objekt tatsächlich liegt. Da das menschliche Gehirn jedoch annimmt, dass das Objekt in der tangentialen Verlängerung des in das Auge treffenden Lichtstrahls liegt, nimmt der Beobachter ein verschobenes Bild wahr.

7.4.1 Beschreibung des Modells

Man geht nun von einer kleinen Kugel aus, deren Mittelpunkt das Auge des Beobachters darstellt. Ein vom Objekt ausgehender gekrümmter Lichtstrahl, der in das Auge des Beobachters trifft, schneidet diese Kugel in einem Punkt, der bei genügend

kleiner Wahl der Kugel in derselben Richtung liegt wie das verschobene Bild des Objekts. Diese Kugel wird als *Bildkugel* bezeichnet. Für alle von einem Beobachter einer Luftspiegelung wahrgenommenen Punkte gilt nun, dass sie auf der Oberfläche der Bildkugel erscheinen und dort eine Abbildung der Luftspiegelung hinterlassen. Zur Vervollständigung des Modells benötigt man eine zweite, wesentlich größere Kugel, die *Objektkugel* heißt und ebenfalls das Auge als Mittelpunkt besitzt. Die Oberfläche der Bildkugel verläuft dabei durch das beobachtete Objekt und trägt daher ein reales Bild desselben (siehe Abb. 58).

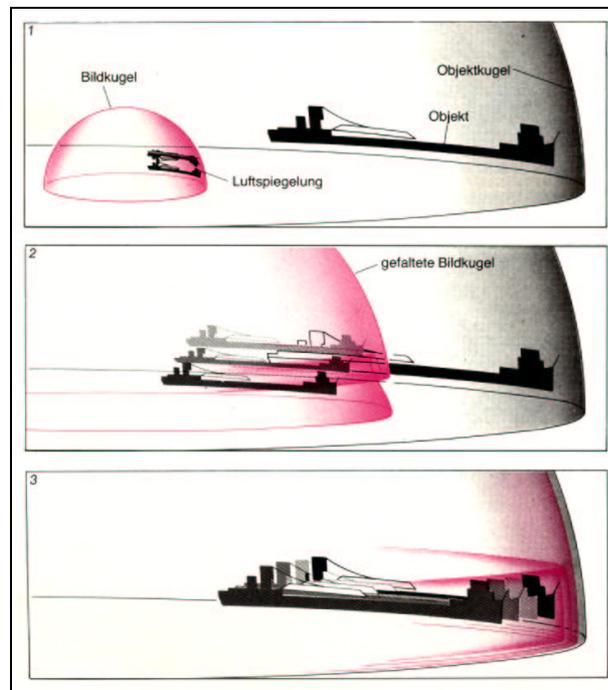


Abbildung 58: Modell einer Transferabbildung von Bildkugel auf Objektkugel. Die Transferabbildung weitet und verformt die Bildkugel, bis sie am Ende des Abbildungsvorgangs mit dem realen Bild des Objekts übereinstimmt. Quelle: [Tape 1985]

Physikalisch wird die Luftspiegelung über die Lichtstrahlen beschrieben, die vom Objekt ausgehen und auf gekrümmten Wegen ins Auge des Beobachters treffen. Um die Luftspiegelung nun mathematisch erfassen zu können, betrachtet man die Abbildung von der Oberfläche der Bildkugel zur Oberfläche der Objektkugel, die durch die Lichtstrahlen definiert werden kann, die auf ihrem Weg von der Objektkugel ins Auge die Bildkugel schneiden. Die Abbildung ordnet also jedem Punkt der Bildkugel (Luftspiegelung) die Information zu, von welchem Punkt des realen Bildes auf der Objektkugel er stammt. Vermöge dieser *Transferabbildung* wird somit jedem Punkt des Spiegelbildes sein Ursprungspunkt zugeordnet.

Anschaulich gesprochen wird die Bildkugel unter der Transferabbildung so aufgeblasen und verzerrt, dass sie schließlich mit der Objektkugel übereinstimmt. Jeder Punkt der Bildkugel folgt dabei der Spur eines Lichtstrahls. Wie in Abb. 59 zu sehen ist, bekommt die Bildkugel im Falle einer Luftspiegelung Falten, wohingegen sie sich isotrop ausbreitet, wenn keine Luftspiegelung vorliegt, da sich in diesem Falle alle Lichtstrahlen geradlinig ausbreiten.

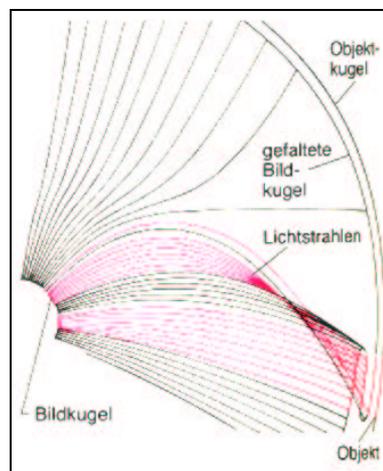


Abbildung 59: Unter der Transferabbildung wird jedem Punkt der Bildkugel ein Punkt auf der Objektkugel zugeordnet. Quelle: [Tape 1985]

7.4.2 Topologische Erklärung des Modells

Mit Hilfe topologischer Begriffe ist TAPE in der Lage, optische Erkenntnisse über das Phänomen der Luftspiegelung zu vermitteln, ohne auf die meteorologischen Verhältnisse einzugehen. Um im Folgenden topologische Sätze anwenden zu können, benötigen wir eigentlich die Voraussetzung, dass die Transferabbildung glatt ist. Allerdings genügt bereits die Annahme einer stetigen Abbildung, da eine solche durch beliebig kleines Ändern in eine glatte Abbildung überführt werden kann. Genauer gilt: Für einen beliebigen Punkt der Bildkugel kann man sich einen Fehler > 0 vorgeben. Dann kann man sich eine glatte Abbildung wählen, deren Abstand von der ursprünglichen Abbildung in jedem Punkt auf der Bildkugel kleiner als der jeweils vorgegebene Fehler ist. Dabei kann man es sogar so einrichten, dass die neue Abbildung durch stetiges Verändern, das heißt homotop, aus der ursprünglichen hervorgeht (vgl. [Bröcker], S. 160, Satz (14.8)).

Um aber in der Praxis zumindest von einer stetigen Transferabbildung ausgehen zu können, muss zunächst einmal die Veränderung der Brechzahlen zwischen Auge und Objekt kontinuierlich sein. Dies genügt aber noch nicht, wie man vielleicht glauben könnte (siehe Beispiel im Abschnitt 7.4.4). Zusätzlich muss nämlich die sogenannte Transversalitätsbedingung erfüllt sein, die besagt, dass Lichtstrahlen vom Auge zum Objekt die Oberfläche der Objektkugel schneiden und sie nicht nur tangential streifen.

Entscheidend für die topologische Herangehensweise ist der Begriff des *Grades einer Abbildung*. Aus der Topologie ist bekannt, dass man der Transferabbildung eine ganze Zahl zuordnen kann, die man Grad der Abbildung nennt. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Zuordnung sind dabei (vgl. [Bredon 1997], S. 124, Korollar (16.4)):

- Eine Abbildung ist durch ihren Grad bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.
- Für jede ganze Zahl n gibt es tatsächlich eine Abbildung vom Grad n .

Um im Folgenden die Grade der entstehenden Transferabbildungen zu berechnen, wird ein Resultat benutzt, das vorab noch einige Erläuterungen notwendig macht. Zunächst einmal wird der Begriff eines *regulären Wertes* der Transferabbildung f benötigt: Ein regulärer Wert ist dabei ein solcher Wert von f (auf der Objektkugel), dass man für jeden Punkt seines Urbildes (auf der Bildkugel) eine Umgebung finden kann, auf der f bijektiv ist (vgl. Satz über die Umkehrabbildung, [Walter 1995], S. 119). Solche regulären Werte existieren im übrigen nicht nur immer, sondern der SATZ VON SARD besagt sogar, dass die Menge aller regulären Werte dicht auf der Objektkugel ist (vgl. [Bröcker], S. 58, Satz (6.1)).

Nun gibt es für das Verhalten der Transferabbildung in der Nähe eines Urbildes eines regulären Wertes zwei Möglichkeiten: Entweder die Orientierung bleibt unter f erhalten, oder sie kehrt sich um. Im ersten Fall sagt man, f habe an dem entsprechenden Punkt auf der Bildkugel einen lokalen Grad von $+1$, im anderen Fall, f habe einen lokalen Grad von -1 .

Das für uns entscheidende Ergebnis lautet dann (vgl. [Bredon 1997], S. 192, Korollar (7.5)):

Der Grad einer (glatten oder zumindest stetigen) Transferabbildung f erhält man, indem man einen regulären Wert auf der Objektkugel auswählt und dann die Summe der lokalen Grade von f an den (paarweise verschiedenen) Urbildpunkten bildet. (Gradformel)

Insbesondere ist also der Grad der Transferabbildung unabhängig vom gewählten Punkt der Objektkugel. Übrigens ist die im obigen „Rezept“ (Gradformel) auftretende Summe wegen der beschränkten Ausdehnung von Bild- und Objektkugel stets endlich, also wohldefiniert (zum Beweis siehe Lemma im Anhang D).

Noch einmal anders ausgedrückt: Der Grad einer Transferabbildung ergibt sich also als Differenz aus den Anzahlen der wahrgenommenen Bilder eines Punktes mit „richtiger“ und „umgekippter“ Orientierung.

Für den Fall, dass keine Luftspiegelung vorliegt, ist der Grad der Transferabbildung, die dann der Identität entspricht, sehr einfach zu errechnen. Wie bereits erwähnt, breitet sich die Bildkugel unter f in diesem Fall isotrop in alle Richtungen aus, bis sie auf die Objektkugel trifft. Es gibt zu jedem Punkt auf der Objektkugel genau ein Urbild auf der Bildkugel. Der Grad der Abbildung entspricht hier also dem lokalen Grad eines beliebigen Urbilds, der hier gleich $+1$ ist, da sich die Orientierung eines Urbilds bei der identischen Abbildung nicht ändert.

Ein weiteres Beispiel soll deutlich machen, dass der Grad der Transferabbildung invariant unter der Wahl des regulären Wertes auf der Objektkugel ist. Abbildung 60 zeigt eine kleine, stark verformte Kugel (Bildkugel unter der Transferabbildung), die gegen einen Teil der Innenseite einer zweiten größeren Kugel (Objektkugel) gepresst wird. Ein Teil der größeren Kugel kommt nicht in Berührung mit der kleineren,

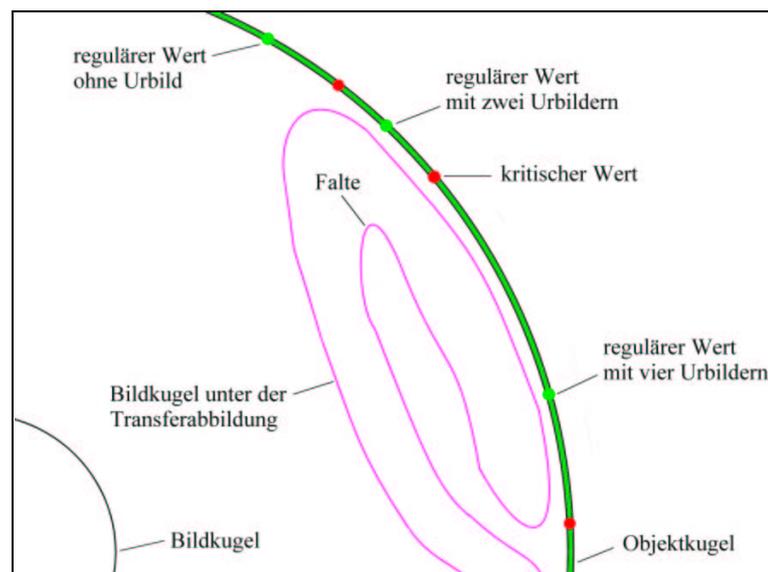


Abbildung 60: Beispielhafte Illustration der Gradinvarianz einer glatten Abbildung.

während gegen andere Teile zwei oder vier Schichten gepresst werden. Die Punkte der größeren Kugel, gegen die eine oder drei Schichten gepresst werden, werden

als kritische Werte bezeichnet (im Unterschied zu den regulären). Man kann hier nochmal sehr plastisch die Aussage des SATZES VON SARD (s.o.) überprüfen, der nichts anderes besagt, als dass diese kritischen Werte „nicht ins Gewicht fallen“.

Ferner liefert Abb. 60 wie gesagt einen anschaulichen Grund für die Unabhängigkeit des Grades einer Abbildung vom gewählten regulären Wert. Dies ist einfach dadurch zu erklären, dass eine Falte auf der Oberfläche der kleineren Kugel jeweils zwei Urbilder mit entgegengesetzter Orientierung hervorruft und den Grad der Abbildung somit nicht ändert. In diesem Beispiel ist der Grad der Abbildung 0, da sich in den Bereichen, in denen zwei Schichten der kleinen Kugel gegen die größere gepresst werden, jeweils zwei Urbilder mit entgegengesetzter Orientierung ergeben. In den Bereichen mit vier Schichten ist lediglich eine Falte hinzugekommen, die jedoch – wie bereits erwähnt – den Grad nicht verändert. Für die regulären Werte ohne Urbild (Bereiche der Objektkugel, an die keine Schicht gepresst wird) ist die Summe der lokalen Grade leer, also ebenfalls gleich 0.

Wenn der Grad der Transferabbildung 0 ist, folgt aus der Gradformel, dass genauso viele Bilder mit gleicher Orientierung wie Bilder mit entgegengesetzter Orientierung beobachtet werden können. Für eine Abbildung vom Grad $n > 0$ gibt es genau n aufrechte Bilder (positiv orientiert) mehr zu sehen als kopfstehende oder seitlich gespiegelte Bilder (negativ orientiert). Umgekehrt gilt für eine Transferabbildung vom Grad $n < 0$, dass sich nach diesem Modell $|n|$ mehr Bilder negativer Orientierung als aufrechte Bilder einstellen.

Außerdem kann man Folgendes feststellen: Wenn n gerade ist, so ist die Gesamtzahl der wahrnehmbaren Bilder ebenfalls gerade, da sich die Anzahl der aufrechten Bilder nach der vorangegangenen Überlegung genau um n von der Anzahl der negativ orientierten unterscheidet. Die Summe aus beiden ist dann also gerade. Aus dem gleichen Grund erhält man eine ungerade Anzahl von Bildern, wenn n ungerade ist. Diese Schlussfolgerung bezeichnet TAPE als *Satz von der ungeraden Anzahl*.

Für die meisten Luftspiegelungen kann man annehmen, dass der Grad der Transferabbildung 1 ist, da Teile eines Objekts häufig nur genau einmal in der richtigen Orientierung wahrgenommen werden können. Wegen der Gradinvarianz kann dann also zur Bestimmung des Grades ein solcher regulärer Wert der Objektkugel gewählt werden, dessen Urbildmenge nur aus einem Punkt besteht, an dem der lokale Grad von f wegen der „normalen“ Orientierung +1 ist. Nach der obigen Gradformel ist der Grad der Transferabbildung dann ebenfalls gleich 1. Unter dieser Annahme (der Grad der Transferabbildung ist gleich 1) erhalten wir eine Bedingung für die Orientierung der gesehenen Bilder. Aufgrund unserer obigen Überlegungen muss für eine Transferabbildung vom Grad $n = 1 > 0$ stets die Anzahl der aufrechten Bilder um 1 größer sein als die Anzahl der negativ orientierten Bilder. Außerdem besagt der Satz von der ungeraden Anzahl, dass die Gesamtzahl der Bilder einer Luftspiegelung ungerade sein muss.

7.4.3 Verzerrungen – Zusammenhang zwischen Verkleinerung und Vergrößerung

Des Weiteren lassen sich mithilfe des vorgestellten Modells noch Aussagen über auftretende Verzerrungen treffen. Verzerrungen treten bei den Bildpunkten auf, die nach dem durch die Transferabbildung definierten Abbildungsvorgang in der Nähe von Falten liegen. Bei diesen Falten handelt es sich nicht um „scharfe Knicke“, sondern vielmehr um „runde Falten“, da die Transferabbildung glatt ist. Wie Abb. 61 illustriert, werden Objekte in der Nähe einer Falte vergrößert auf die Bildkugel übertragen und nehmen dort mehr Platz ein. Es erscheint plausibel, dass deshalb andere Objekte gleichzeitig verkleinert abgebildet werden müssen.

Um ein Maß für die auftretende Vergrößerung bzw. Verkleinerung bei Luftspiegelungen zu erhalten, stellt man sich die Transferabbildung zunächst so vor, als wenn sie die ursprünglich unverformte Bildkugel, die das Bild der Luftspiegelung

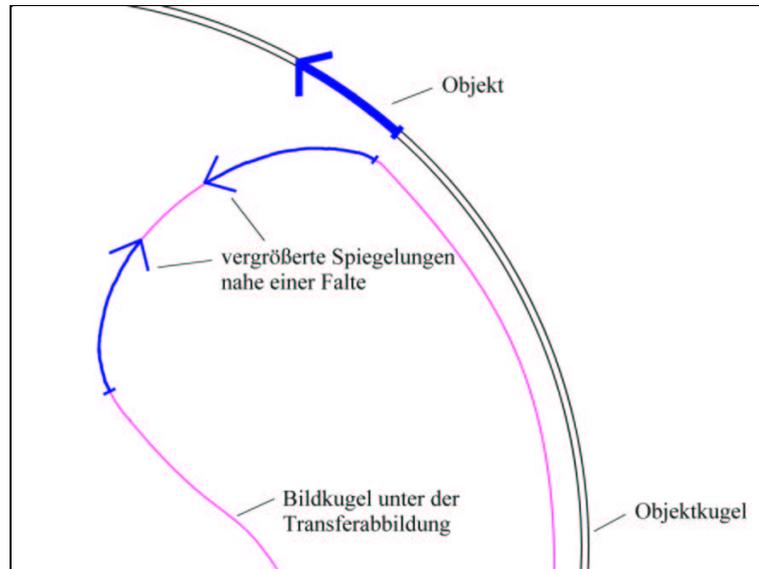


Abbildung 61: Vergrößerung von in der Nähe einer Falte liegenden Objekten.

trägt, so verformt, dass man am Ende dieses Prozesses das Original des Objekts zurückerhält. Nun kann man für einen Punkt der Luftspiegelung, das heißt für einen Punkt auf der ursprünglichen Bildkugel, eine Umgebung U_1 wählen, die vermöge der Transferabbildung f auf eine Umgebung U_2 transformiert wird, die dann eine unverzerrte Version der ersteren darstellt, mit anderen Worten: Die Verzerrungen in einem Teil der Luftspiegelung werden durch Verformen und Falten dieses Teils wieder rückgängig gemacht. Offensichtlich ist die durch eine Luftspiegelung bewirkte Vergrößerung dadurch gegeben, dass man die Fläche der Umgebung U_1 durch die Fläche von U_2 teilt. Umgekehrt ist die Verkleinerung also durch den Kehrwert gegeben, das heißt durch den Quotienten zweier Flächen, von denen die erste auf der verformten und die zweite auf der ursprünglichen, unverformten Kugel liegt. Mithin ergibt sich für die durchschnittliche Verkleinerung V der Wert

$$V = \frac{\text{Gesamtoberfläche der transformierten Kugel}}{\text{Gesamtoberfläche der ursprünglichen Kugel}} \quad (7.21)$$

Da die Transferabbildung in der Praxis häufig den Grad 1 hat, also aufgrund der Gradgleichheit homotop zur Identität ist (vgl. wichtige Eigenschaften des Grades einer Abbildung), ist V hier stets größer oder gleich 1: Der Fall $V = 1$ tritt eben für die identische Abbildung ein, da dann keine Mehrfachbilder auftreten und die transformierte Kugel keine Faltungen aufweist. Ansonsten gibt es Faltungen, und die Gesamtoberfläche der transformierten Kugel wird dadurch größer als die der ursprünglichen, weshalb die durchschnittliche Verkleinerung größer als 1 ist, und zwar umso größer, je mehr Bilder es gibt. Daraus folgt die ursprüngliche Vermutung:

Vergrößerungen im Bereich der Faltungen müssen mit starken Verkleinerungen an anderen Stellen einhergehen, insbesondere dann, wenn viele Mehrfachbilder auftreten.

7.4.4 Leistungen und Probleme der topologischen Herangehensweise

Die obigen theoretisch ermittelten Ergebnisse decken sich jedoch nicht immer mit den tatsächlich beobachteten Phänomenen. Bei Spiegelungen nach oben kann zuweilen eine gerade Anzahl von Bildern wahrgenommen werden. Dies muss noch nicht auf ein Versagen dieses Modells hinweisen, da das fehlende Bild einfach zu stark verkleinert sein könnte, um beobachtet werden zu können. Allerdings bleibt festzustellen, dass die Möglichkeit solch extremer Verkleinerungen die Annahme, dass der Grad der Transferabbildung gleich 1 ist, fragwürdig erscheinen lassen kann (man beachte noch einmal, wie diese Annahme gerechtfertigt wurde: siehe 7.4.2, letzter Abschnitt).

Schließlich soll am Beispiel einer unteren Luftspiegelung gezeigt werden, dass es Situationen gibt, in denen dieses Modell nicht angewendet werden kann, da die auftretende Transferabbildung nicht (zumindest) stetig ist. Wie nämlich Abb. 62 zeigt, wird bei einer unteren Luftspiegelung im Allgemeinen die erwähnte Transversalitätsbedingung verletzt. Dies ist dadurch zu erklären, dass bei einer Spiegelung nach unten

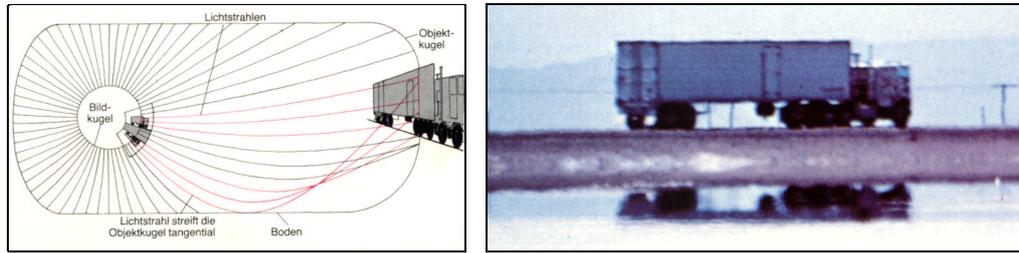


Abbildung 62: Spiegelung nach unten: Links ist zu erkennen, dass die Transversalitätsbedingung verletzt wird. Rechts ist ein Foto einer entsprechenden Spiegelung abgebildet. Quelle: [Tape 1985]

die Lichtstrahlen konvex zur Erdoberfläche verlaufen und aufgrund dessen Lichtstrahlen auftreten können, die den Erdboden, der mit einem Teil der Objektkugel zusammenfällt, gerade noch berühren. Demzufolge kann die Transferabbildung an dieser Stelle nicht stetig sein, was anschaulich am Foto des Lastwagens in Abb. 62 zu erkennen ist. Im unteren Teil des Spiegelbildes ist eine scharfe Linie zu sehen, an der das Bild des Lastwagens abrupt endet und ebenso abrupt das Bild von dahinter liegenden Bergen anfängt. Hier sind die benutzten Sätze aus der Topologie nicht anwendbar, und tatsächlich ist der Satz von der ungeraden Anzahl verletzt: Es sind zwei Bilder sichtbar.

Bei Spiegelungen nach oben sind die gemachten Annahmen hingegen im Allgemeinen erfüllt, zumal die Objektkugel so gewählt werden kann, dass die Transversalitätsbedingung nicht verletzt wird. Damit jeder Lichtstrahl vom Auge auf die Objektkugel treffen kann, muss die Objektkugel gegebenenfalls verformt werden. Dies gilt beispielsweise für ein Schiff auf dem Wasser, denn dann müsste die Objektkugel nach unten abgeplattet werden, sodass der untere Teil der Objektkugel mit der Wasseroberfläche zusammenfallen würde. Es handelt sich hier nicht um dieselbe Situation wie beim LKW, die oben geschildert wurde, da die Lichtstrahlen bei der Spiegelung nach oben konkav zur Erdoberfläche (hier Wasseroberfläche) gekrümmt

sind und die Objektkugel nach oben beliebig ausgedehnt werden kann, was für das Modell jedoch keine weiteren Auswirkungen hat.

Trotz aller Einschränkungen liefert die topologische Herangehensweise neue Erkenntnisse über die Natur der Luftspiegelungen. Beispielsweise liefert der Satz über die ungerade Anzahl die verblüffende Erkenntnis, dass sich unter gewissen Bedingungen stets eine ungerade Anzahl von Bildern einstellt. Außerdem werden bekannte Eigenschaften von Luftspiegelungen wie extreme Verkleinerungen und Vergrößerungen anhand eines anschaulichen Modells auf eine andere als die herkömmliche Weise erklärt.

Offensichtlich bietet das Thema Luftspiegelungen hier Möglichkeiten für ein fächerübergreifendes Projekt, das Luftspiegelungen sowohl aus dem Blickwinkel des Physikunterrichts als auch unter dem mathematischen Aspekt der Topologie betrachtet.

8 Schlussbetrachtung

Anamorphosen und Luftspiegelungen sind optische Phänomene, die uns im Alltag, wenn auch unbewusst, häufiger begegnen als zunächst vermutet. Betrachtet man seine Umwelt mit einem für diese auffälligen Tatsachen geschärften Blick, so sind viele Erscheinungen dieser Art wahrzunehmen (Verkehrszeichen auf der Straße, Vortäuschung von Wasserflächen auf erhitzten Straßen). Die Dechiffrierung perspektivischer und katoptrischer Anamorphosen setzt jedoch voraus, dass die Anamorphose zuvor produziert wurde, um anschließend wieder entzerrt werden zu können. Hier handelt es sich also nicht um ein ursprüngliches, sondern um ein konstruiertes Phänomen, während die Luftspiegelungen eine Naturerscheinung darstellen.

Vor allem der Vorgang, extrem verzerrte Bilder, die keinen Schluss auf ihren ursprünglichen Inhalt zulassen, mithilfe eines entsprechenden Spiegels zu entschlüsseln, fasziniert den Menschen. Gleiches gilt für die Luftspiegelungen, die die Menschheit bereits seit Jahrtausenden beschäftigen. In der Schule erfahren Schüler durch die Betrachtung einer völlig verzerrten Anamorphose, die auf diese Weise ein Geheimnis verbirgt, das gelüftet werden will, eine besondere Motivation. Verschiedene Möglichkeiten zur Produktion dieser Anamorphosen wurden in dieser Arbeit vorgestellt.

Die Aufgabe des physikalischen Unterrichts besteht auch darin, den Schülern „[...] eine besondere Art der Allgemeinbildung zuteil werden zu lassen“ (zitiert nach [Schlichting u.a. 1981], S. 15). Wie in den Kapiteln 2 und 3 verdeutlicht wurde, genügen die untersuchten Phänomene dieser Anforderung, die Grenzen des klassischen Physikunterrichts zu überschreiten und beispielsweise geistesgeschichtliche oder künstlerische Dimensionen mit in den Unterricht einzubeziehen. Eine Möglichkeit der Integration dieser Themengebiete in den Optikunterricht bietet der kontextorientierte Unterricht, innerhalb dessen die „Zerrbilder“, die beiden Erscheinungen gemein sind, den Rahmen bilden können. Eine Unterrichtssequenz könnte – ausgehend vom ebenen Spiegel, bei dem keine Verzerrungen auftreten – unter dem Ge-

sichtspunkt der Anamorphosen die Gesetzmäßigkeiten am gekrümmten Spiegel, bei dem im Allgemeinen Verzerrungen auftreten, behandeln und gleichzeitig das Wissen über den ebenen Spiegel vertiefen. Außerdem können die Abbildungsgleichungen sowie die Bildkonstruktion am ebenen sowie am gekrümmten Spiegel in diesem Rahmen behandelt werden. Am Beispiel der Luftspiegelungen ist ein kontextorientierter Zugang zur Brechung und Totalreflexion des Lichts möglich. Bei der Beschreibung der Phänomene auf dieser Ebene handelt es sich hauptsächlich um Unterrichtsstoff der Sekundarstufe I. Erklärungen des Phänomens Luftspiegelung, die über den Unterrichtsstoff der Sekundarstufe I hinausgehen, erfolgten im Kapitel 7, in dem von den Schülern unter anderem ein höheres mathematisches Verständnis verlangt wird.

Aufgrund des zeitlich sehr begrenzten Rahmens, der einem Physiklehrer für die Vermittlung einer gewissen Stofffülle zur Verfügung steht, werden die in dieser Arbeit gegebenen Anregungen nur im eingeschränkten Maße umgesetzt werden können. Allerdings lassen sich einige der Ideen sicherlich in Form von (interdisziplinären) Projekten, zum Beispiel im Rahmen einer schulischen Projektwoche, verwirklichen.

A Weitere perspektivische Anamorphose und ihre Entzerrung

Wie bereits erwähnt, wurden Anamorphosen in vergangenen Jahrhunderten zum Teil als „geheime Bilder“ verwendet, die ihren wahren Inhalt unkenntlich machen sollten. So ist beispielsweise die anamorphotische Zeichnung des britischen Königs Charles I. politisch motiviert. Sie wurde von königlichen Anhängern nach seiner Exekution im Jahr 1649 in Umlauf gebracht. Zur Entzerrung wurde die Anamorphose unter einem kleinen spitzen Winkel fotografiert.



Abbildung 63: Perspektivische Anamorphose von König Charles I. ([Nekes 2002])
und ihre Entzerrung bei Betrachtung unter einem kleinen spitzen Winkel.

B Verwendete Anamorphoskope

In dieser Arbeit wurden Spiegelkegel und Spiegelzylinder benutzt, die in Abb. 64 dargestellt sind. Während es für Zylinderanamorphosen relativ einfach ist, selbst einen geeigneten Anamorphoskop zu erstellen (beispielsweise wie hier mit einem Abflussrohr und einer Spiegelfolie), ist die Herstellung eines Spiegelkegels wesentlich schwieriger. Ein aus Spiegelfolie geformter Spiegelkegel liefert keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Hingegen weist der von mir benutzte Kegel, der in der Werkstatt des Physikalischen Instituts der Universität Münster auf einer Drehbank gedreht und dessen Oberfläche nach der Fertigstellung galvanisch behandelt wurde, – ebenso wie der nach dem gleichen Verfahren konstruierte Zylinderspiegel – sehr gute Spiegeleigenschaften auf. Die Maße der beiden in der Werkstatt konstruierten Spiegel wurden mathematisch so berechnet, dass das anamorphotische Bild auf ein DIN-A4-Blatt passt. Die (Basis-)Durchmesser dieser beiden Spiegel betragen 5,9 cm. Der Spiegelzylinder ist 20,0 cm hoch; die Höhe des Spiegelkegels lässt sich leicht aus dem Öffnungswinkel von 60° und dem Basisradius bestimmen.

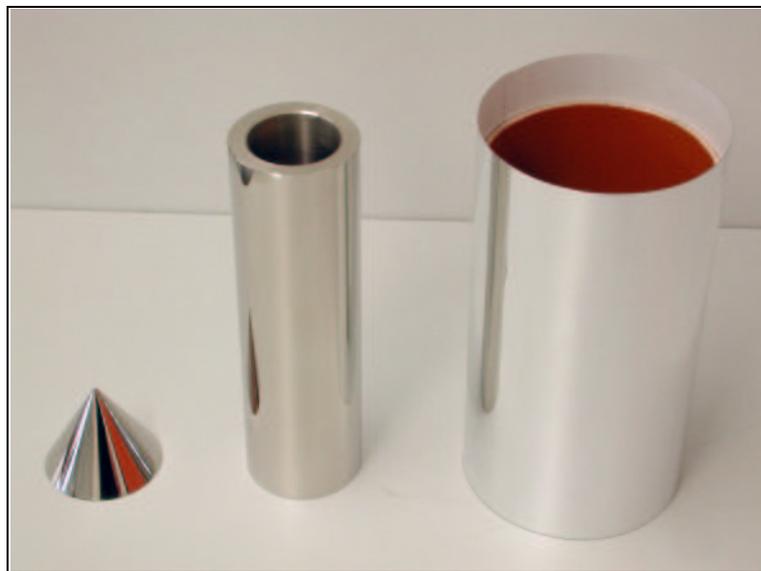


Abbildung 64: Diese Spiegel wurden in der vorliegenden Arbeit benutzt.

C Fotografisch hergestellte Kegelanamorphosen und ihre Entzerrungen

C.1 Eigene anamorphotische Aufnahmen

Im Folgenden werden anamorphotische Bilder dargestellt, die mit dem in Kapitel 5.3 beschriebenen fotografischen Verfahren hergestellt wurden.



Abbildung 65: Anamorphose einer Katze.

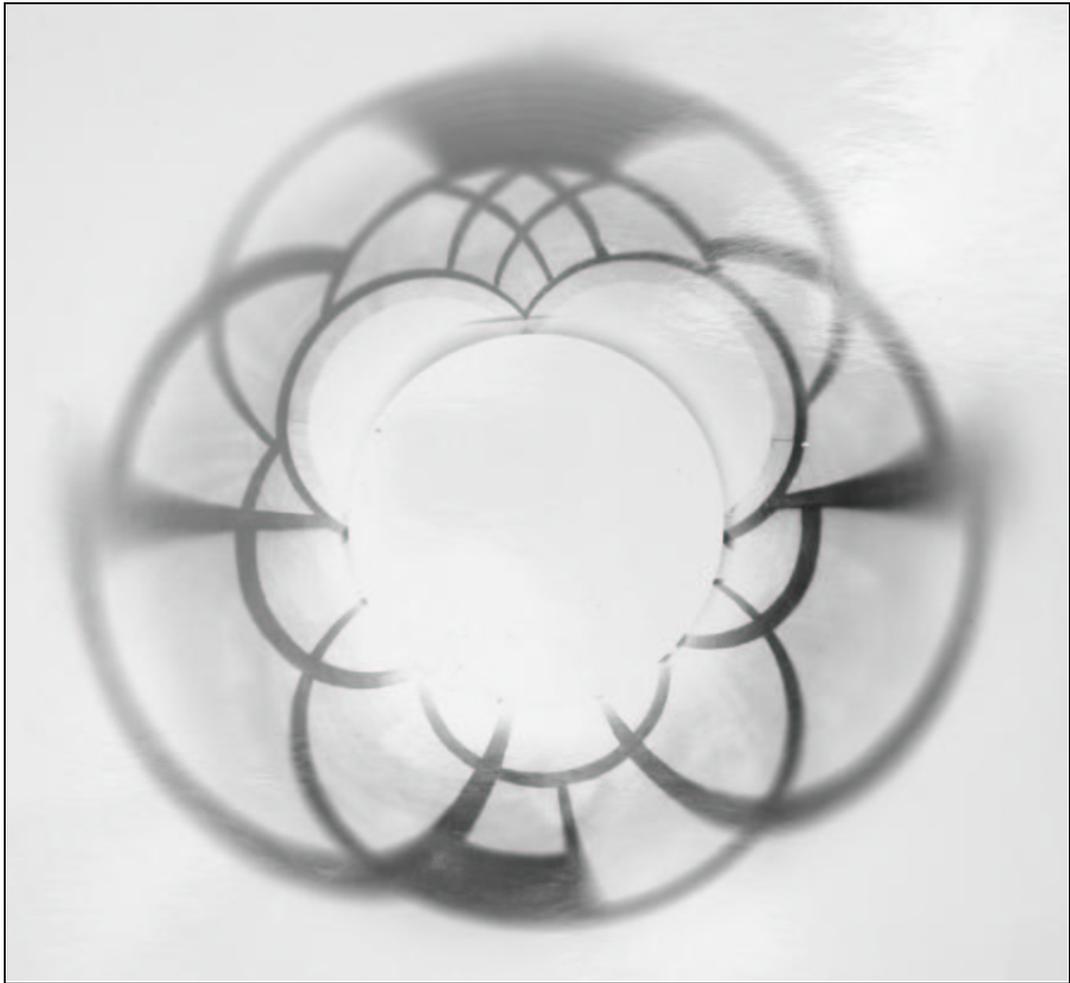


Abbildung 66: Anamorphose eines Fachwerkgiebels.

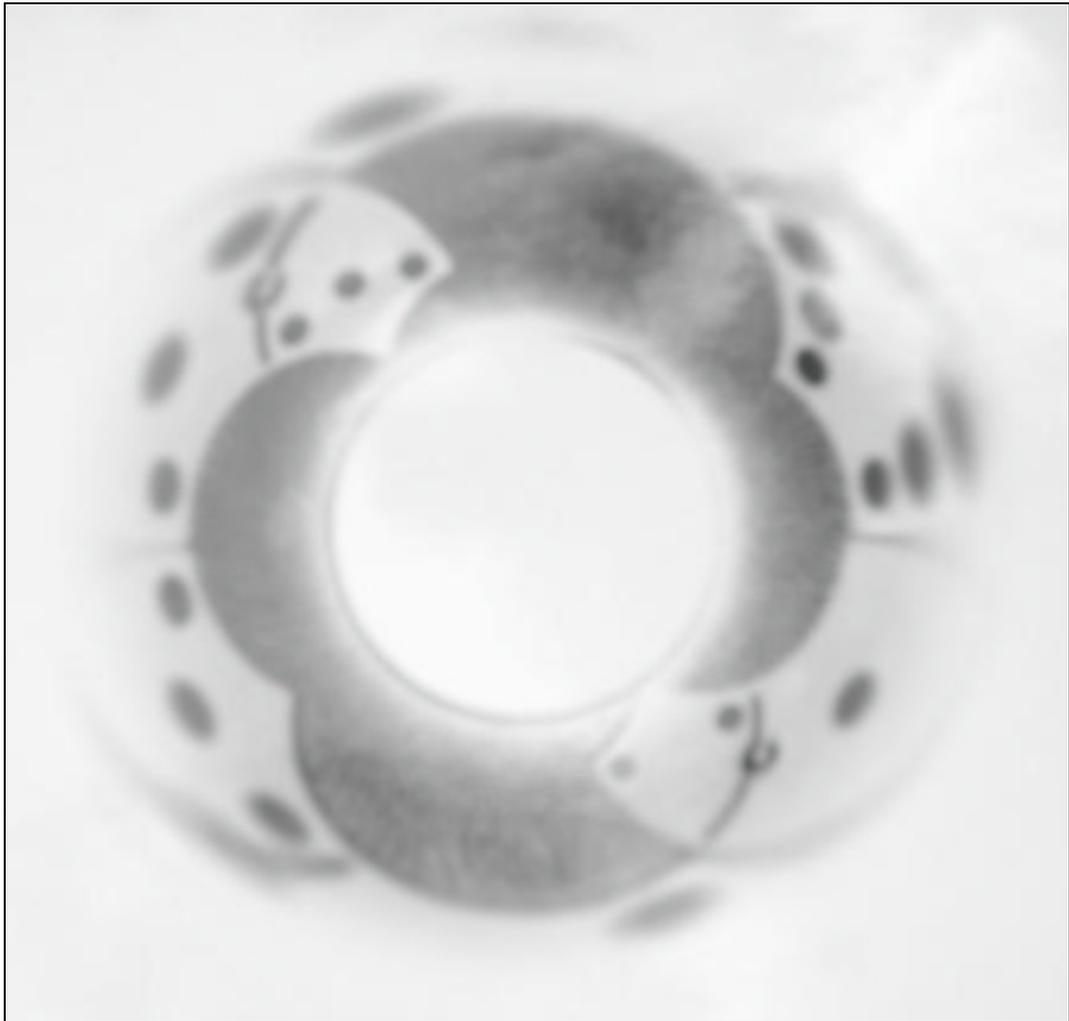


Abbildung 67: Anamorphose einiger Dominosteine.

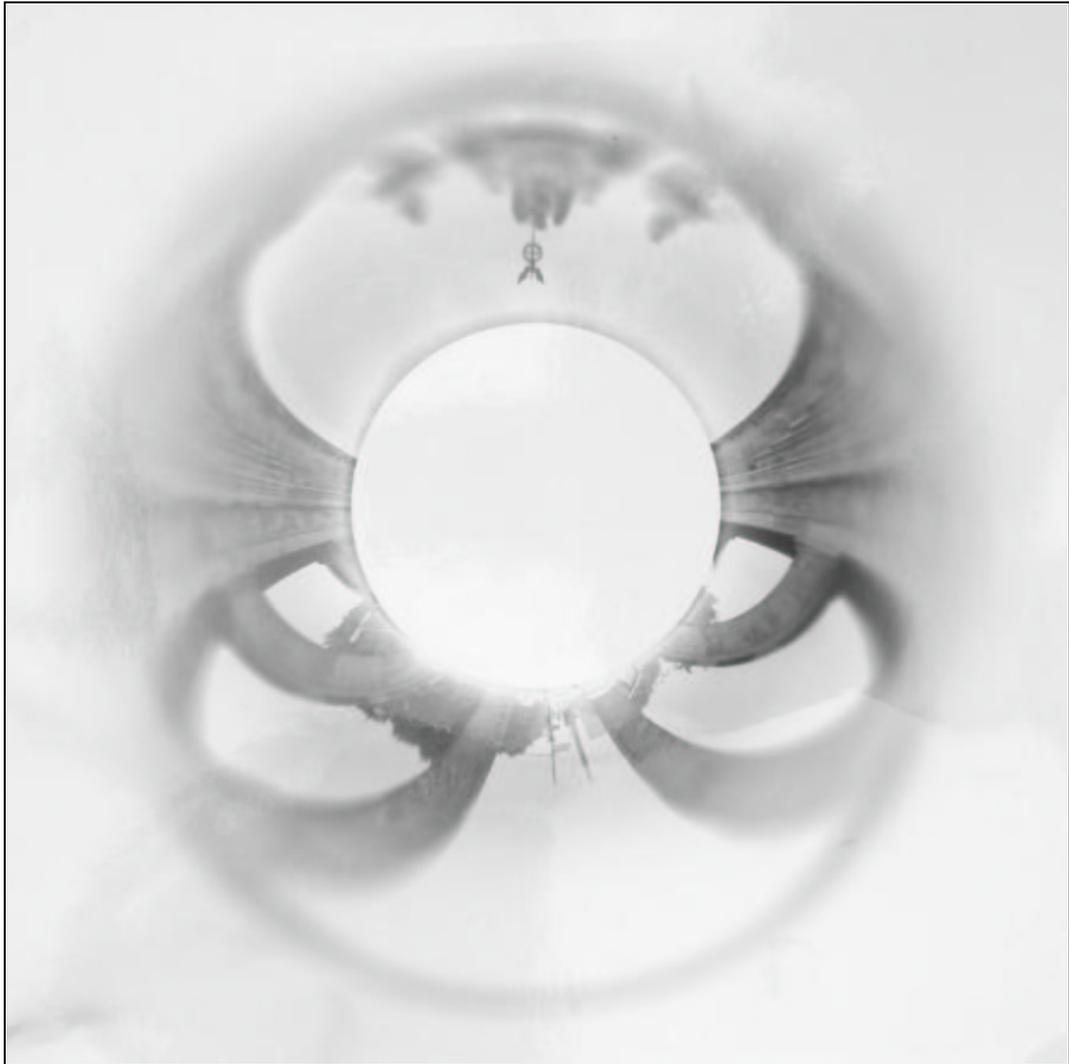


Abbildung 68: Anamorphose des Brandenburger Tores.

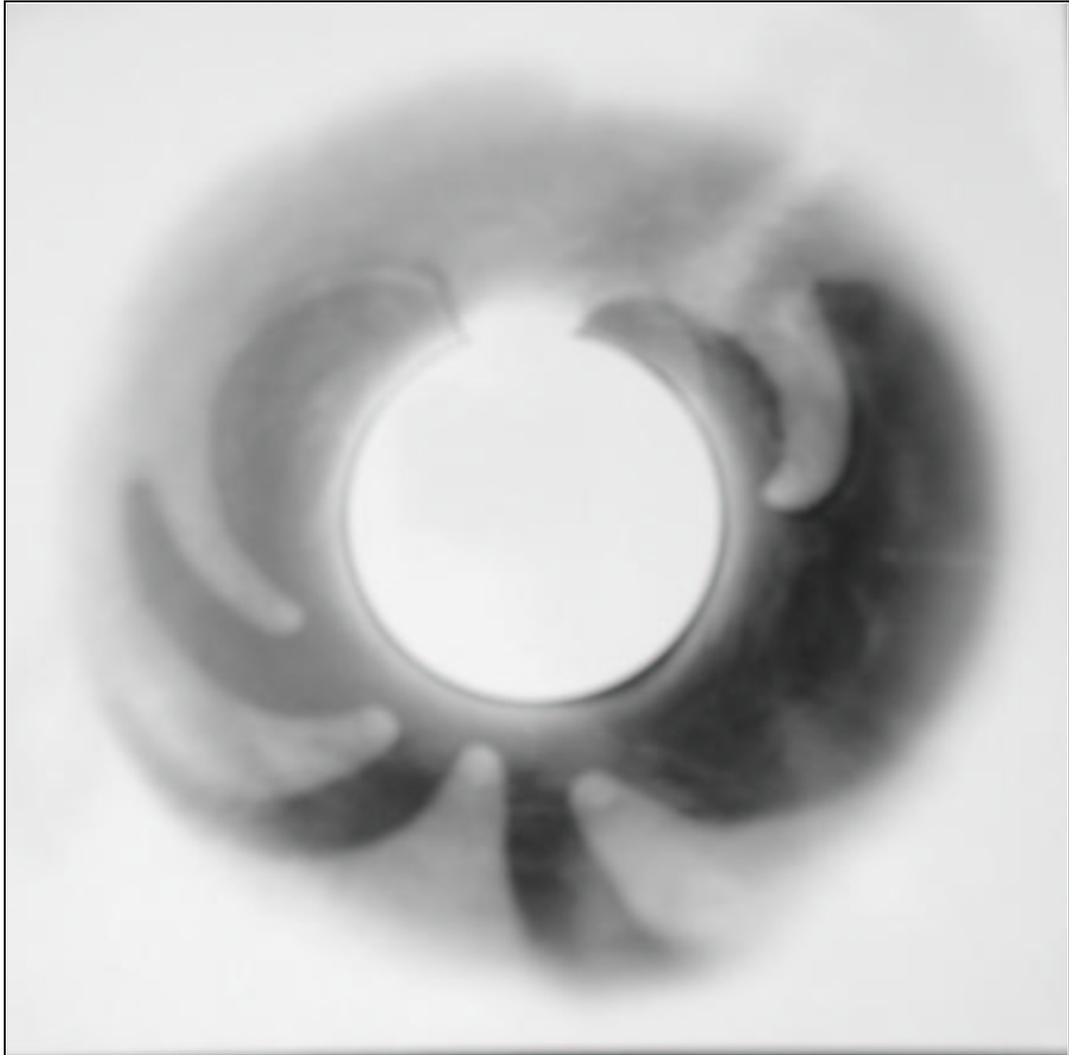


Abbildung 69: Anamorphose einer Hand.

C.2 Entzerrung der Aufnahmen mithilfe des Anamorphoskops

Mithilfe des passenden Spiegelkegels können die Aufnahmen wieder entzerrt werden. Im Folgenden sind die anamorphotischen Aufnahmen aus dem vorigen Abschnitt mit dem entsprechenden Anamorphoskop abgebildet. Die charakteristischen Ausmaße des Spiegelkegels (Basisdurchmesser und Öffnungswinkel) wurden bereits im Anhang B dargelegt.

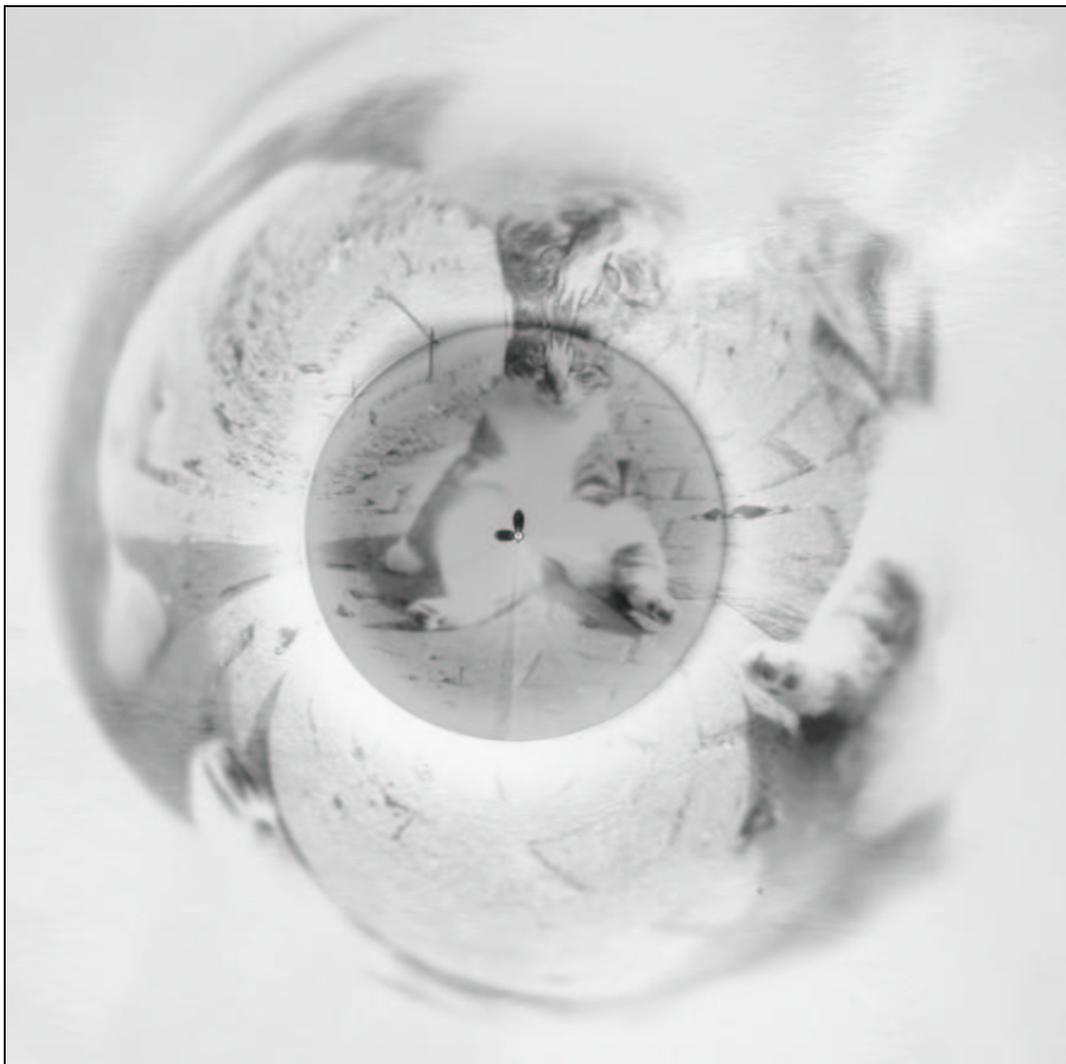


Abbildung 70: Anamorphose einer Katze und ihr Bild im Spiegelkegel.

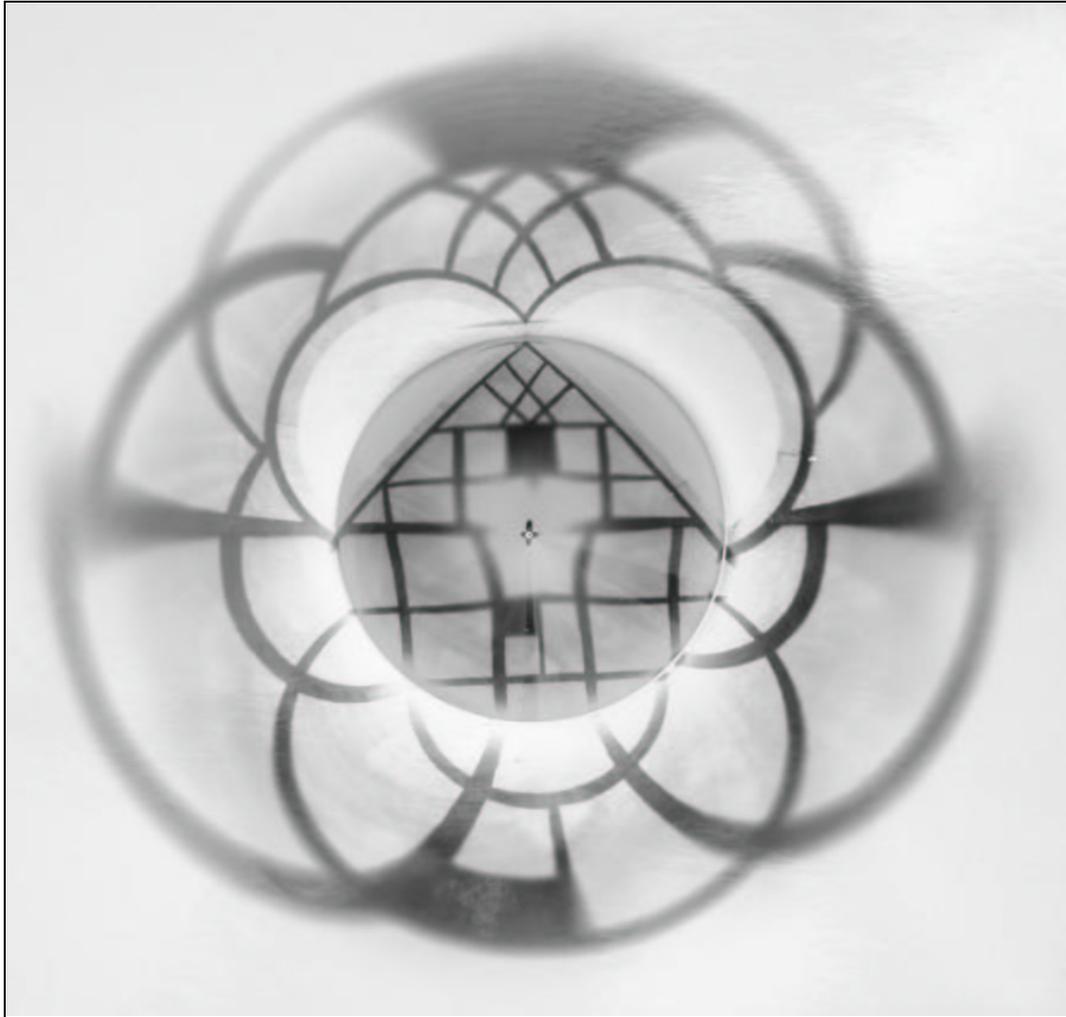


Abbildung 71: Anamorphose eines Fachwerkgiebels und sein Bild im Spiegelkegel.

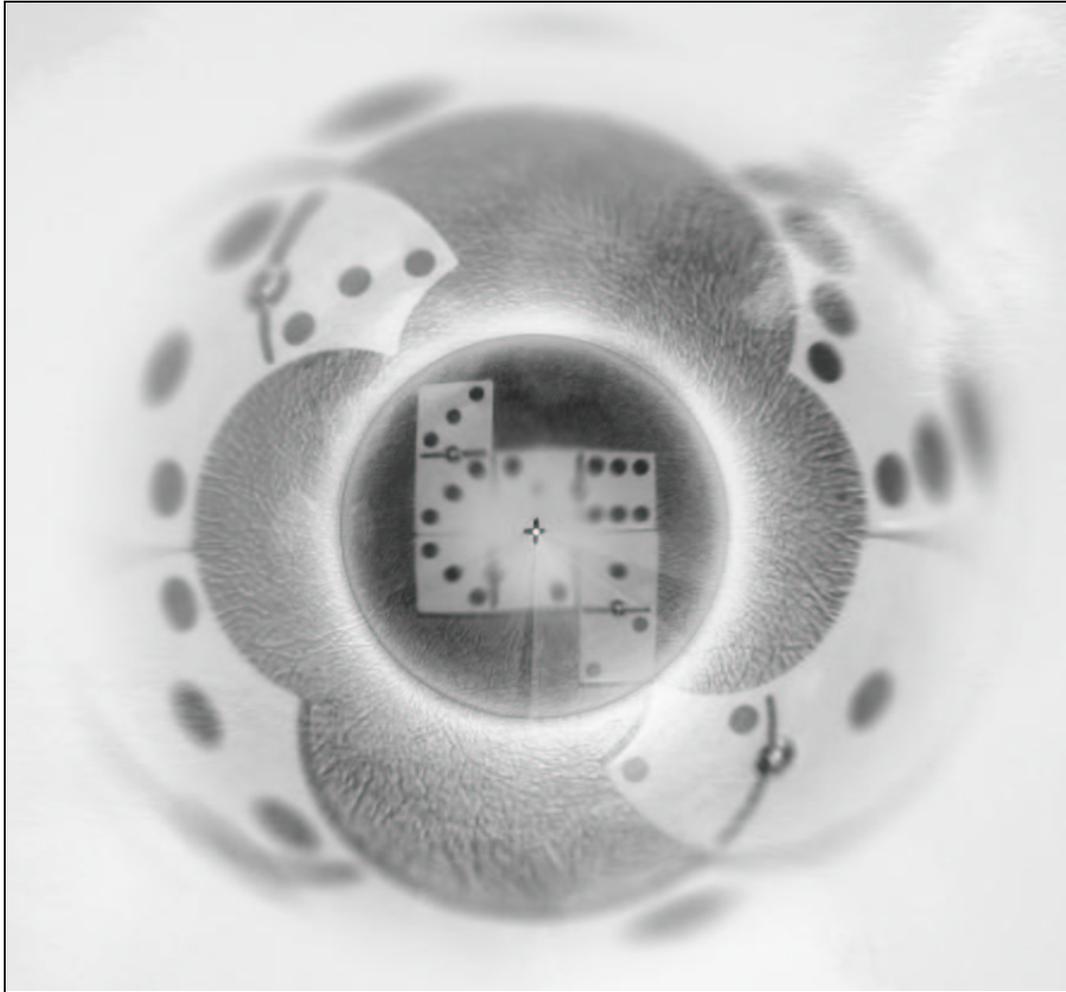


Abbildung 72: Anamorphose einiger Dominosteine und deren Bild im Spiegelkegel.



Abbildung 73: Anamorphose des Brandenburger Tores und sein Bild im Spiegelkegel.

D Hilfssatz zur topologischen Beschreibung von Luftspiegelungen

Lemma D.1. *Seien M, N glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeiten und M kompakt (hier: $M = N = S^2$). Weiter sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $y \in N$ ein regulärer Wert. Dann ist die Menge der Urbilder von y , d.h. $f^{-1}(y)$, endlich.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $f^{-1}(y)$ unendlich sei. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M durch:

$$\begin{aligned} a_1 &\in f^{-1}(y) \text{ beliebig,} \\ a_{n+1} &\in f^{-1}(y) \setminus \{a_k \mid k \leq n\} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Diese Definition besagt lediglich, dass alle Folgenglieder a_n paarweise verschieden sind. Da M (in unserem Falle die Oberfläche der Bildkugel) kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die konvergiert. Der Grenzwert dieser Folge sei $a \in M$. Laut Voraussetzung ist f glatt, also insbesondere stetig und es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{f(a_{n_k})}_{=y} = f(\underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}}_{=a}) = f(a) = y.$$

Andererseits ist ebenfalls nach Voraussetzung y ein regulärer Wert von f . Wegen des Satzes über die Umkehrabbildung (vgl. [Walter 1995], S. 119) muss f dann lokal um a bijektiv sein. Dies stellt aber einen Widerspruch dar, denn aufgrund der Konvergenz von $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ liegen in jeder Umgebung von a Teilfolgenglieder a_{n_k} , für die gilt:

$$f(a_{n_k}) = y = f(a).$$

Unsere Annahme, dass die Menge der Urbilder von y unendlich ist, ist also falsch und das Lemma somit bewiesen. \square

E Computerprogramm auf der beiliegenden CD

Auf der beiliegenden CD befinden sich neben den Dateien des im Rahmen dieser Arbeit erstellten Computerprogramms sämtliche Abbildungen dieser Arbeit sowie weitere Grafiken zum Thema, die nicht eingebunden wurden. Außerdem ist diese Arbeit auf der CD in verschiedenen Formaten abgelegt.

Ordner *Computerprogramm*

Das im Kapitel 5.5.1 dokumentierte Programm ist hier im Verzeichnis *Computerprogramm* zu finden. Um es zu starten, ist die Datei `Ana01.exe` auszuführen. Im Unterverzeichnis *Quellcode* sind die Dateien gespeichert, die den von Delphi compilierten Quellcode des Programms enthalten. Das Unterverzeichnis *Grafiken* beinhaltet Vorlagen sowie Anamorphosen, die mit diesem Programm erstellt wurden.

Ordner *Examensarbeit*

Hier befindet sich diese Arbeit im PDF- und PS-Format.

Ordner *Grafiken*

Im Unterverzeichnis *in_Arbeit* sind sämtliche Abbildungen dieser Arbeit gespeichert. Im Unterverzeichnis *weitere_Grafiken* findet man eine weitere Verzeichnisstruktur, auf deren Inhalt anhand der Ordnernamen geschlossen werden kann. Es handelt sich dabei u. a. um weitere Fotos vom LEGO®-Zeichner sowie um eingescannte Bilder der anamorphotischen Fotos (Abbildungen 65 bis 69), die nach dem fotografischen Verfahren aus Kapitel 5.3 erstellt wurden.

Soweit die Quellen der Abbildungen nicht in den Bildunterschriften angegeben sind, wurden die Fotos und Skizzen selbst erstellt.

Abbildungsverzeichnis

1	Anamorphotische Skizze eines Kinderkopfes und eines Auges	12
2	Schrägansichtige Anamorphose von Erhard SCHÖN	13
3	Hans Holbein: „Die Gesandten“	14
4	Historische Zylinderanamorphose	16
5	Historische Grafik aus einer Serie von Kegelanamorphosen	17
6	Anamorphose in der Umwelt	18
7	Alltägliche Luftspiegelung	20
8	Transversale elektromagnetische Welle	22
9	Aufteilung der Wellenvektoren an einer Grenzfläche	28
10	Totalreflexion von Wellen	29
11	Reflexion am ebenen Spiegel	37
12	Reflexion am Konvexspiegel	39
13	Konstruktionsschema zur Herstellung einer perspektivischen Anamorphose	42
14	Konstruktionsschema zur Herstellung katoptrischer Anamorphosen	43
15	Versuchsaufbau zur Erstellung eines Rasters für Zylinderanamorphosen	44
16	Selbst erstelltes Raster für Zylinderanamorphosen	46
17	Kaustik am Hohlspiegel	47
18	Abhängigkeit einer Zylinderanamorphose vom Betrachtungswinkel	50
19	Skizze zur Zylindertransformation in Polarkoordinaten	52
20	Skizze zur Zylindertransformation in kartesische Koordinaten	55
21	Schematische Strahlengänge am Spiegelkegel	59
22	Versuchsaufbau zur Herstellung anamorphotischer Bilder	61

Abbildungsverzeichnis

23	Fotoabzug einer Kegelanamorphose	64
24	Fotoabzug einer Kegelanamorphose mit Anamorphoskop	65
25	Kegelanamorphosenzeichner nach Michel PARRÉ	68
26	Projektion des Aug- und Spiegelpunktes in die Grundebene	69
27	Zweidimensionale Skizze des Zylinderanamorphosenzeichners	70
28	Verschiedene Ansichten des LEGO®-Zeichners	72
29	Gelenkparallelogramm des LEGO®-Zeichners	73
30	Vorbereitete Blätter zur Herstellung einer Zylinderanamorphose	75
31	Mithilfe des LEGO®-Zeichners hergestellte Anamorphosen	76
32	Entzerrung des anamorphotisierten Quadrats	77
33	Entzerrung des anamorphotisierten Cliparts	77
34	Skizze zum Programm	81
35	Computeranamorphosen für Zylinder- und Kugelspiegel	83
36	Computeranamorphosen für einen Kegelspiegel	83
37	Astronomische Refraktion	87
38	Verzerrung der Sonne	88
39	Anhebung durch terrestrische Refraktion	89
40	Erweiterung des Horizonts	90
41	Spiegelung nach unten	92
42	Mehrfache Spiegelung nach unten	93
43	Zeichnung einer unteren Luftspiegelung von BÜSCH	95
44	Entstehung einer unteren Luftspiegelung nach FRASER und MACH	96
45	Obere Luftspiegelung eines Schiffes	98
46	Einfache Spiegelung nach oben	99
47	Skizze einer mehrfachen oberen Luftspiegelung nach VINCE	100
48	Mehrfache Spiegelung nach oben	101
49	Seitliche Luftspiegelung	103

Abbildungsverzeichnis

50	Vergrößerungen bei Luftspiegelungen	105
51	Verkleinerungen bei Luftspiegelungen	106
52	Zeichnung einer beobachteten Fata Morgana	107
53	Sukzessive Lichtstrahlbrechung	111
54	Scheitelpunktskurve nach TAIT	113
55	Verallgemeinertes Scheitelpunktsverfahren	114
56	Zeichnung zur Herleitung der Bedingungsgleichung für Spiegelungen nach oben	116
57	Verlauf totalreflektierter Lichtstrahlen nach WEGENER	120
58	Modell einer Transferabbildung	122
59	Veranschaulichung der Transferabbildung	123
60	Beispielhafte Bild- und Objektkugel	126
61	Modell einer Falte	129
62	Spiegelung nach unten: Modell und Natur	131
63	Perspektivische Anamorphose von König Charles I.	135
64	Verwendete Anamorphoskope	136
65	Kegelanamorphose einer Katze	137
66	Kegelanamorphose eines Fachwerkgiebels	138
67	Kegelanamorphose einiger Dominosteine	139
68	Kegelanamorphose des Brandenburger Tores	140
69	Kegelanamorphose einer Hand	141
70	Kegelanamorphose einer Katze mit Anamorphoskop	142
71	Kegelanamorphose eines Fachwerkgiebels mit Anamorphoskop	143
72	Kegelanamorphose einiger Dominosteine mit Anamorphoskop	144
73	Kegelanamorphose des Brandenburger Tores mit Anamorphoskop	145

Literatur

- [Baltrusaitis 1977] BALTRUSAITIS, Jurgis: *Anamorphic Art*. Cambridge: Chadwyck-Healey LTD, 1977
- [Baltrusaitis 1984] BALTRUSAITIS, Jurgis: *Anamorphoses ou Thaumaturgis opticus*. Paris: Flammarion, 1984
- [Bergmann 1966] MATOSSI, F.: *Bergmann Schaefer. Lehrbuch der Experimentalphysik*. Band III, Optik, 4. Auflage. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1966
- [Born 1978] BORN, Gernot; EULER, Manfred: Physik in der Schule. In: *bild der wissenschaft* Nummer 2 (1978), S. 74-81
- [Boysen u.a. 1994] BOYSEN, Gerd u.a.: *Physik für Gymnasien. Sekundarstufe I. Länderausgabe D. Teilband 1*. Berlin: Cornelsen, 1994
- [Bredon 1997] BREDON, Glen E.: *Topology and Geometry. Graduate Texts in Mathematics 139*. 3. verbesserte Auflage. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1997
- [Bröcker] BRÖCKER, Theodor; JÄNICH, Klaus: *Einführung in die Differentialtopologie*. Berlin etc.: Springer, 1990
- [Bürger 1992a] BÜRGER, Wolfgang: Zylinder-Anamorphosen. In: *Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht* 46 Nummer 8 (1992), S. 468-471
- [Bürger 1992b] BÜRGER, Wolfgang: Computer-Anamorphosen. In: *bild der wissenschaft* 29 Nummer 9 (1992), S. 116-117
- [Bürger 1992c] BÜRGER, Wolfgang: Das Geheimnis des Spiegelzylinders. In: *bild der wissenschaft* 29 Nummer 10 (1992), S. 133
- [Demtröder 1995] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Berlin etc.: Springer, 1995
- [Dietze 1957] DIETZE, Gerhard: *Einführung in die Optik der Atmosphäre*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1957
- [Elert 2003] ELERT, Glenn: The Physics Hypertextbook. URL: <http://hypertextbook.com/physics/waves/refraction>, besucht im Mai 2003.
- [Elffers u.a. 1975] ELFFERS, Joost; SCHUYT, Mike; LEEMAN, FRED: *Anamorphosen. Ein Spiel mit der Wahrnehmung, dem Schein und der Wirklichkeit*. Köln: DuMont, 1975

- [Eser 1998] ESER, Thomas: *Schiefe Bilder. Die Zimmersche Anamorphose*. Nürnberg: Verlag des Germanischen Nationalmuseums, 1998
- [Fraser 1976] FRASER, Alistair B.; MACH, William H.: Mirages. In: *Scientific American* 234 Nummer 1 (1976), S. 102-111
- [Füsslin 1999] FÜSSLIN, Georg; HENTZE, Ewald: *Anamorphosen. Geheime Bilderwelten*. Stuttgart: Füsslin, 1999
- [Gardner 1975] GARDNER, Martin: Mathematical Games. The curious magic of anamorphic art. In: *Scientific American* 232 Nummer 1 (Januar 1975), S. 110-116
- [Gerthsen 1995] VOGEL, Helmut: *Gerthsen Physik*. 18. Auflage. Berlin etc.: Springer, 1995
- [Greenler 1980] GREENLER, Robert: *Rainbows, halos, and glories*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980
- [Harbeke 2001] HARBEKE, Matthias: *Physikalische Untersuchungen zum Phänomenbereich der Luftspiegelung*. Schriftliche Hausarbeit. WWU Münster, 2001
- [Hecht 1992] HECHT, Eugene: *Optik*. Bonn etc.: Addison-Wesley, 1992
- [Hickin 1992] HICKIN, Philip: Anamorphosis. In: *Mathematical Gazette* 76 (1992), S. 208-221
- [Hunt 2000] HUNT, J.L.: Anamorphic images. In: *American Journal of Physics* 68 Nummer 3 (2000), S. 232-237
- [Lehn 1998] LEHN, Waldemar H.; LEGAL, Thomas L.: Long-range superior mirages. In: *Applied Optics* 37 Nummer 9 (1998), S. 1489-1494
- [Löw 1990] LÖW, Alfred: *Luftspiegelungen: Naturphänomen und Faszination*. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1990
- [Marchand 1996] MARCHAND, Pierre: *Zerrbilder. Buch-Aktiv-Box*. München: arsEdition, 1996
- [Metzler 1998] GREHN, Joachim; KRAUSE, Joachim: *Metzler Physik*. 3. Auflage. Hannover: Schroedel Verlag GmbH, 1998
- [MfSW 1993] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG (Hrsg.): *Richtlinien und Lehrpläne für das Gymnasium – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen: Physik*. Düsseldorf: Ritterbach-Verlag, 1993

- [MfSW 1999] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG (Hrsg.): *Richtlinien und Lehrpläne für das Gymnasium – Sekundarstufe II in Nordrhein-Westfalen: Physik*. Düsseldorf: Ritterbach-Verlag, 1999
- [Muckenfuß 1995] MUCKENFUSS, H.: *Lernen im sinnstiftenden Kontext - Entwurf einer zeitgemäßen Didaktik für den Physikunterricht*. Berlin: Cornelsen, 1995
- [Nekes 2002] NEKES, Werner; VON DEWITZ, Bodo: *ICH SEHE WAS, WAS DU NICHT SIEHST!. Sehmaschinen und Bilderwelten*. Göttingen: Steidl, 2002
- [Nolting 1997] NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik - Band 3: Elektrodynamik*. Wiesbaden: Vieweg, 1996
- [Pernter u.a. 1922] PERNTER, Josef M.; EXNER, Felix M.: *Meteorologische Optik*. 2. teilweise umgearbeitete Auflage. Wien, Leipzig: Wilhelm Baunmüller, 1922
- [Scheiner 1631] SCHEINER, Ch.: *Pantographica*. Rom, 1631
- [Schiele 1935] SCHIELE, Wolf-Egbert: *Zur Theorie der Luftspiegelungen*. Universität Leipzig, Diplomarbeit, 1935
- [Schlichting u.a. 1981] SCHLICHTING, H.J.; BACKHAUS, U.: *Physikunterricht 5-10*. München: U&S Pädagogik, 1981
- [Schlichting u.a. 1996] SCHLICHTING, H.J.; UCKE, Ch.: Der anamorphotische Kerzenleuchter. In: *Physik in unserer Zeit* 27 Nummer 1 (1996), S. 6-8
- [Schlichting 1997] SCHLICHTING, H.J.: Im Reich der Fee Morgana. In: *Physik in der Schule* 35 Nummer 12 (1997), S. 444
- [Schremmer 2002] SCREMMER, Hans: Optische Erscheinungen der Atmosphäre, Fotos, Astrofotos, Buchempfehlungen. URL: <http://www.schremmer.de> - Aktualisierungsdatum: 10.05.2003. - besucht im Mai 2003.
- [Tape 1985] TAPE, Walter: Die Topologie von Luftspiegelungen. In: *Spektrum der Wissenschaft* 29 Nummer 8 (1985), S. 48-55
- [Traenkle 1998] TRÄNKLE, Eberhard: Simulation of inferior mirages observed at the Halligen Sea. In: *Applied Optics* 37 Nummer 9 (1998), S. 1495-1505
- [Thomas 1981] THOMAS, David Emil: Spiegelbilder. In: *Spektrum der Wissenschaft* Nummer 2 (Februar 1981), S. 18-32

- [Tributsch 1983] TRIBUTSCH, Helmut: *Das Rätsel der Götter. Fata Morgana*. Frankfurt/Main, Berlin: Ullstein GmbH, 1983
- [Ucke 1999] UCKE, Christian: Connecting past and future. URL: <http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/database/lectures>, besucht im Mai 2003.
- [Ullrich 1994] ULLRICH, Hans-Jörg: Anamorphosen. Untersuchungen zur Konstruktion von Zylinderanamorphosen. In: *Naturwissenschaften im Unterricht - Physik* 5 Nummer 24 (1994), S. 33-36
- [Ullrich 1996a] ULLRICH, Hans-Jörg: *Anamorphosen*. Privater Aufsatz, 1996
- [Ullrich 1996b] ULLRICH, Hans-Jörg: Anamorphotische Tasse. In: *Physik-Boutique: Unterrichts Anregungen für Lehrkräfte* (1996)
- [Vollmer 1995] VOLLMER, Michael: „Wenn das Licht in Farben sich erbricht...“ In: *Physik in unserer Zeit* 26 Nummer 3 (1995), S. 106-115
- [Vollmer 1997a] VOLLMER, Michael: Von den Phänomenen zur Physik. In: *Praxis der Naturwissenschaften - Physik* 46 Nummer 3 (1997), S. 2-9
- [Vollmer 1997b] VOLLMER, Michael: Lichtbrechung, Oasen und Luftschlösser: Gibt es den Palast der Fata Morgana? In: *Praxis der Naturwissenschaften - Physik* 46 Nummer 3 (1997), S. 10-14
- [Walker 1981] WALKER, Jearl: Zerrbilder, und wie man sie entzerrt. In: *Spektrum der Wissenschaft* Nummer 9 (September 1981), S. 134-138
- [Walter 1995] WALTER, Wolfgang: *Analysis 2. Grundwissen Mathematik*. 4. durchgesehene und ergänzte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995
- [Wegener 1918] WEGENER, Alfred: Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen. In: *Annalen der Physik* 57 Nummer 19 (1918), S. 203-230
- [Wodzinski 1992] WODZINSKI, Rita; WIESNER, Hartmut: Beobachtungen von Spiegelbildern an Wölbspiegeln. In: *Naturwissenschaften im Unterricht - Physik* 3 Nummer 14 (1992), S. 38-45

Danke!

Diese Arbeit wurde mit fachlicher Hilfe verschiedener Personen verfasst. Dazu möchte ich namentlich folgenden Personen danken:

- Herrn Prof. Dr. H.-J. Schlichting für die Themenstellung und die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes im Institut.
- Herrn Carsten Bruns für die Hilfe bei der Erstellung der Fotos, die Unterstützung und Geduld beim Bau des LEGO®-Anamorphosenzeichners sowie für die Vermittlung bei der Konstruktion eines Spiegelkegels und Spiegelzylinders.
- Herrn Stefan Langsch für seine fachlichen Tipps und Anregungen.
- Den Mitarbeitern des Instituts für Didaktik der Physik.
- Herrn Prof. Dr. U. Backhaus dafür, dass er mir ein Archiv mit verschiedenen Units zur Programmierung des Anamorphosenrechners zur Verfügung gestellt hat.
- Herrn Dipl.-Ing. H.-J. Ullrich für die Bereitstellung seines privaten Aufsatzes über Anamorphosen.
- Herrn Stefan Ginthum von der LPE Technische Medien GmbH für die kostenlose Bereitstellung von LEGO®-Technik-Bausteinen zur Erstellung des LEGO®-Anamorphosenzeichners.
- Maik Bäumer für die Hilfe bei der Erstellung des Computerprogramms.
- Meinen KorrekturleserInnen Kathrin Schnetker und Michael Weiermann für die Auseinandersetzung mit meiner Rechtschreibung und Grammatik bzw. für die fachliche Beratung.
- Bernd Scharlau und Timo Mersmann für die Ablenkung und Diskussionen während der Mittagspausen und im Büro.
- Meiner Freundin María del Carmen Lalana Cordeiro für ihre Korrekturvorschläge, ihre Geduld und ihre moralische Unterstützung während der letzten Monate.
- Gregor Grüning für das L^AT_EX Layout.
- Allen denjenigen, die ich vergessen habe.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Das gleiche gilt auch für die beigegebenen Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen.

Münster, den 10.06.2003